

公開授業「応用数学Ⅱ」報告書

数学教育講座・張間忠人

1. 本授業の目的と概要

授業題目は、「初等整数論と数学教材」である。授業では、いままで慣れ親しんできた数の世界、とくに“整数の世界”にスポットを当て、様々な具体例と共に、その数学現象について新たに学び直す。そのことを通して、算数・数学の教科書の理解をより深めると同時に、算数・数学に関する教材研究（たとえば、オリジナルな問題作り）のヒントは、より専門的な数学の学習の中にたくさん落ちていることを感じてもらいたい。

講義では、とくに教科書は指定せず、初回の授業で 15 回分のプリントを配布した。前半は、経験的に良く知っているユークリッドの割り算から始まり、最大公約数を求めるユークリッドの互除法、その後、ベズーの等式を導き、一次不定方程式の解法について説明した。これらの応用として、最大公約数を計算する石取りゲーム、また 2 進法を利用した数当てのカード教材を紹介した。後半は、整数の合同関係に関する性質を説明し、それらを応用した倍数の判定方法の作り方について紹介した。また、その判定方法を利用した倍数に関する問題作りを試みた。さらに、この授業の到達目標であるオイラーの定理とその証明を紹介し、応用として、一次合同方程式の解法について説明した。

この授業は、数学専修の 3 回生を対象としている。受講者数は 6 名であった。選択科目ということもあり、受講者は、数学専修 3 回生の半数であった。

この「応用数学Ⅱ」は、今年度赴任して初めて担当した専門教育科目である。教育学部

における専門数学の授業で何を教えればよいか、私にとって大切な問題である。おそらく「初等整数論と数学教材」はその筆頭であろう。

2. 公開授業と授業カンファレンス

公開授業は、2009 年 12 月 7 日（月）2 時間目に 203 講義室にて行った。他講座からも 1 名の先生に参加いただき、計 7 名の先生方に参観していただいた。授業終了後に、同じ教室にてカンファレンスを行った。

公開授業の目的は、「与えられた自然数 n に対し、1 から n までの自然数の中で、 n と互いに素な数の和 $\sigma(n)$ の公式を作ること」である。授業の流れは以下のとおりである。

(1) まず、いつも通り、前回の復習のための小テストとその解説を行った。今回の問題は以下のとおりである。

問 1. (2+5=7 点)

(1) ベズーの等式について説明しなさい。(証明はしなくてよい.)

(2) 0 でない 2 つの整数の公約数は、最大公約数の約数であることを証明しなさい。必要ならば、ベズーの等式を使ってよい。

問 2. (1+2=3 点)

(1) 27300 の標準素因数分解を求めなさい。

(2) 27300 と 1980 の最小公倍数の標準素因数分解を求めなさい。

(2) 1 から 100 までの和を求めさせ、その際、良く知られている計算方法 $(1+100) \times 100/2$ に気づかせ、 $\sigma(20)$ などの具体例の場合も同じ方法で計算できることを説明した。

(3) $\sigma(n)$ の公式を記述する際に必要なオイラー数 $\varphi(n)$ の計算方法を紹介した。(その証明は、後日の授業で紹介した。)

(4) $\sigma(n)=n \times \varphi(n)/2$ を証明した。

これまでの小テストの解答状況や授業中の反応から、計算問題は得意であるが、証明問題は苦勞している様である。後半の授業の大きな課題である。

授業後のカンファレンスにご参加いただいた先生方から、授業に対する感想・ご意見をいただいた。

- ・演習の時間が少ないなら、小テストの問題を紙の上だけではなく、黒板に解かせて、人前で説明させるような演習の時間を設けてはどうか。

- ・学生は証明問題が苦手である。具体的な現象から何を証明すべきか、見通しをたてる訓練が必要である。

- ・背理法の証明方法、また帰納法を用いた不等式の証明が難しそうである。

- ・存在証明において、何か適当なもの(具体例)を一つ見つければよい、ということが直ぐに理解されない。

- ・ $\sigma(n)$ の公式の応用はあるか?どのように教材研究につながるのか?

これまで先へ急ぐことを優先していたが、次の授業から、小テストの解説を学生にさせている。今後、小人数の授業は、「小テスト⇒学生による小テストの解説⇒講義⇒練習問題による演習⇒まとめ」の流れで進めたい。

3. 試験結果

試験は、小テスト9回、中間試験、期末試験を行った。小テストの正解率は38%である。日常の復習が足りない様である。中間試験と期末試験の問題を、計算問題・証明問題・説明問題に分類して(代表的な問題は以下のとおり)、その正解率を次の表にまとめてみた。

計算問題:「 $3^{99}+4^{88}$ を7で割ったときの余りを求めよ。」「一次合同方程式 $35x \equiv 14 \pmod{56}$ を解け。」

証明問題:「 $a=qb+r$ をみたす4つの自然数がある。このとき、 a と b の最大公約数と、 b と r の最大公約数は一致することを証明せよ。」

説明問題:「整数の合同の定義を述べよ。」「授業で学習した11の倍数判定法を述べよ。」

	計算問題	証明問題	説明問題
中間試験	72%	24%	78%
期末試験	84%	90%	87%

証明問題の正解率が急激に高くなった。

4. アンケート調査

期末試験終了後、以下の項目でアンケートを行った。

<p>I 授業に対する感想など</p> <p>A) 教員は、この授業の学習目標を分かりやすく示していましたか。</p> <p>B) 教員は、丁寧に熱心に授業を進めていましたか。</p> <p>C) 授業の進度は適切でしたか。</p> <p>D) 教員は、学生が自主的に質問や意見が述べられるよう配慮していましたか。</p> <p>E) この授業で学んだ内容は、将来、教師になってから役に立つと思いますか。</p> <p>II 学生のとりくみ方など</p> <p>F) この授業によく出席しましたか</p> <p>G) この授業で学んだ内容をよく理解することができましたか。</p> <p>H) この授業の内容に興味・関心をもつことができましたか。</p> <p>I) この授業から新たな問題意識や知的好奇心を刺激されることが多かったですか。</p> <p>J) 時間外にこの授業の学習をしましたか。</p>

どの項目も4段階(4, 3, 2, 1)で答えてもらった。各項目の回答の合計は以下のとおりである。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
23	24	21	22	24	19	18	21	20	19

とくに、項目Eについて全員が最高点であったことは、今後の授業づくりの励みになる。