10　一次分数変換

10.1　一次分数変換とは

複素数 a，b，c，d は $a\,d-b\,c\neq 0$ をみたすとする．写像

$$f(z)=\frac{a\,z+b}{c\,z+d}$$

を**一次分数関数**といい，この関数による変換 $w=f(z)$ を**一次分数変換**という．$c=0$ のときには，$d\neq 0$ より

$$f(z)=\frac{a}{d}\,z+\frac{b}{d}\qquad\text{（相似拡大と回転，平行移動）}$$

となる．また，$c\neq 0$ のときには，

$$f(z)=\frac{a}{c}-\frac{\dfrac{a\,d-b\,c}{c^2}}{z+\dfrac{d}{c}}$$

と表せるので，$f(z)$ は次の 4 つの関数を順に合成した関数である．

(1)　$z_1=z+\dfrac{d}{c}$　（平行移動）

(2)　$z_2=\dfrac{1}{z_1}$　（反転）

(3)　$z_3=-\dfrac{a\,d-b\,c}{c^2}\,z_2$　（相似拡大と回転）

(4)　$w=z_3+\dfrac{a}{c}$　（平行移動）

10.2　リーマン球面

複素数平面を 3 次元の (ξ,η,ζ)-空間の (ξ,η)-平面と同一視する．複素数 $z=x+i\,y$ は点 $\mathrm{P}(x,y,0)$ に対応する．原点を中心とする単位球面

$$S=\left\{\,(\xi,\eta,\zeta)\;\middle|\;\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1\,\right\}$$

を考え，この球面上の「北極」にあたる点を $\mathrm{N}(0,0,1)$ とする．点 $\mathrm{Q}(\xi,\eta,\zeta)$ を N 以外の単位球面 S 上の点とする．2 点 N，Q を通る直線と平面 $\zeta=0$ との交点は一意的に存在し，

$$\left(\frac{\xi}{1-\zeta},\frac{\eta}{1-\zeta},0\right)$$

と表せる．これは球面上の点を平面上の点に対応させる（投影する）方法の一つであり，これを**ステレオ投影**という．逆に，2 点 N，P を通る直線と単位球面 S との交点は一意的に存在し，$z=x+i\,y$ とおくと

$$\left(\frac{2\,\mathrm{Re}\,z}{|\,z\,|^2+1},\frac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|\,z\,|^2+1},\frac{|\,z\,|^2-1}{|\,z\,|^2+1}\right)$$

と表せる．したがって，ステレオ投影は，複素数平面と，単位球面から点 N を除いた集合との間の全単射を与えている．このとき，単位球面 S を**リーマン球面**または**複素球面**という．点 N に対応する点が複素数平面にないので，対応

$$\mathrm{Q} \to \mathrm{N} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\,z\,| \to +\infty$$

を考慮して，**無限遠点**と呼ばれる仮想的な数 ∞ を複素数の集まり $\mathbb{C}$ に添加すると，$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は S と同一視できる．

10.3 直線と円

a，b，c を実数とする．(ξ, η)-平面上の直線 $a\,\xi + b\,\eta + c = 0$ は 2 つの平面 $\zeta = 0$ と

$$a\,\xi + b\,\eta + c\,(1 - \zeta) = 0$$

の共通部分である．したがって，複素数平面上の直線は，ステレオ投影によって，点 N を通る単位球面 S 上の円に対応する．

また，実数 a，b，r と用いて，複素数平面上の円は $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ と表せる．

$$z = x + i\,y, \qquad c = \frac{a^2 + b^2 - r^2 - 1}{2}, \qquad d = \frac{r^2 - a^2 - b^2 - 1}{2}$$

とおくと，ステレオ投影により，

$$\begin{aligned} 0 = \frac{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}{|\,z\,|^2 + 1} &= \frac{2\,a\,\mathrm{Re}\,z + 2\,b\,\mathrm{Im}\,z + c\,\left(|\,z\,|^2 - 1\right) + d\,\left(|\,z\,|^2 + 1\right)}{|\,z\,|^2 + 1} \\ &= a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta + d \end{aligned}$$

となる．複素数平面上の直線と同様に，複素数平面上の円は，ステレオ投影によって，単位球面 S 上の円に対応する．

以上のように複素数平面上の直線および円は単位球面 S 上では円に対応することから，複素数平面上の直線や円を総称して**円**という．

例題 10.1　$-2\,i$ を 3，0 を -1，i を 0 に写す一次分数変換 $w = \dfrac{a\,z + b}{c\,z + d}$ を求めよ．

（解）　仮定より

$$3 = \frac{a \cdot (-2\,i) + b}{c \cdot (-2\,i) + d}, \qquad -1 = \frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + d}, \qquad 0 = \frac{a \cdot i + b}{c \cdot i + d}$$

であるから，$b = -i\,a$，$c = a$，$d = -b = i\,a$ となり，

$$w = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} = \frac{a\,z - i\,a}{a\,z + i\,a} = \frac{z - i}{z + i}$$

が得られる．■

例題 10.2　一次分数変換 $w = \dfrac{z - i}{z + i}$ によって，虚軸 $\mathrm{Re}\,z = 0$ が写される図形を求めよ．

（解）　虚軸上の複素数 z は実数 b を用いて $z = i\,b$ と表されるので，

$$w = \frac{i\,b - i}{i\,b + i} = \frac{b - 1}{b + 1}$$

より w は実数である．$b = -1$ のとき $w = \infty$，$b = \infty$ のとき $w = 1$ と考えることにより，実軸 $\mathrm{Im}\,w = 0$ 全体に写される．■

例題 10.3　複素数 z，w がそれぞれ $|\,z\,|<1$，$|\,w\,|<1$ をみたすとき，次の不等式が成り立つ．

$$\left|\,\frac{z-w}{1-\overline{w}\,z}\,\right|<1$$

（解）

$$\begin{aligned}|\,1-\overline{w}\,z\,|^2-|\,z-w\,|^2&=(1-\overline{w}\,z)\,(1-w\,\overline{z})-(z-w)\,(\overline{z}-\overline{w})\\&=\left(1-|\,z\,|^2\right)\,\left(1-|\,w\,|^2\right)>0\end{aligned}$$

より $|\,1-\overline{w}\,z\,|>|\,z-w\,|$ が得られ，

$$\left|\,\frac{z-w}{1-\overline{w}\,z}\,\right|=\frac{|\,z-w\,|}{|\,1-\overline{w}\,z\,|}<1$$

となる．■

例題 10.4　α を複素数とする．一次分数変換 $w=z+\alpha$ によって，円は円に写されることを示せ．
（解） 複素数平面上の直線の方程式は，複素数 A と実数 B を用いて $\overline{A}\,z+A\,\overline{z}+B=0$ と表せる．$C=B-\overline{A}\,\alpha-A\,\overline{\alpha}$ とおくと，すべての実数 z に対して $\overline{z}=z$ が成り立つので，

$$\overline{C}=\overline{B-\overline{A}\,\alpha-A\,\overline{\alpha}}=\overline{B}-\overline{\overline{A}}\,\overline{\alpha}-\overline{A}\,\overline{\overline{\alpha}}=B-A\,\overline{\alpha}-\overline{A}\,\alpha=C$$

となり，C は実数である．直線の方程式に $z=w-\alpha$ を代入すると，

$$0=\overline{A}\,(w-\alpha)+A\,\overline{(w-\alpha)}+B=\overline{A}\,w+A\,\overline{w}+C$$

となり，複素数平面上の直線は直線に写される．

また，複素数平面上の円の方程式は，複素数 A と実数 B を用いて $z\,\overline{z}+\overline{A}\,z+A\,\overline{z}+B=0$ と表せる．ただし，$|\,A\,|^2>B$ である．

$$D=A-\alpha,\qquad E=\alpha\,\overline{\alpha}-\overline{A}\,\alpha-A\,\overline{\alpha}+B$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\overline{E}=&\overline{\alpha}\,\alpha-A\,\overline{\alpha}-\overline{A}\,\alpha+B=E,\\|\,D\,|^2-E=&(A-\alpha)\,\overline{(A-\alpha)}-\left(\alpha\,\overline{\alpha}-\overline{A}\,\alpha-A\,\overline{\alpha}+B\right)=|\,A\,|^2-B>0\end{aligned}$$

より，E は実数であり，$|\,D\,|^2>E$ が成り立つ．円の方程式に $z=w-\alpha$ を代入すると，

$$0=(w-\alpha)\,\overline{(w-\alpha)}+\overline{A}\,(w-\alpha)+A\,\overline{(w-\alpha)}+B=w\,\overline{w}+\overline{D}\,w+D\,\overline{w}+E$$

となり，複素数平面上の円は円に写される．

以上から，一次分数変換 $w=z+\alpha$ により，円は円に写される．■

例題 10.5　α を 0 でない複素数とする．一次分数変換 $w=\alpha\,z$ によって，円は円に写されることを示せ．
（解） 複素数平面上の直線の方程式は，複素数 A と実数 B を用いて $\overline{A}\,z+A\,\overline{z}+B=0$ と表せる．$C=\dfrac{A}{\overline{\alpha}}$ とおき，直線の方程式に $z=\dfrac{w}{\alpha}$ を代入すると，

$$0=\overline{A}\cdot\frac{w}{\alpha}+A\cdot\frac{\overline{w}}{\overline{\alpha}}+B=\overline{C}\,w+C\,\overline{w}+B$$

となり，複素数平面上の直線は直線に写される．

また，複素数平面上の円の方程式は，複素数 A と実数 B を用いて $z\,\overline{z}+\overline{A}\,z+A\,\overline{z}+B=0$ と表せる．ただし，$|\,A\,|^2>B$ である．$C=\alpha\,A$，$D=|\,\alpha\,|^2\,B$ とおくと，

$$|\,C\,|^2-D=|\,\alpha\,|^2\,|\,A\,|^2-|\,\alpha\,|^2\,B=|\,\alpha\,|^2\,\Big(|\,A\,|^2-B\Big)>0$$

である．円の方程式に $z=\dfrac{w}{\alpha}$ を代入すると，

$$0=\alpha\,\overline{\alpha}\left(\frac{w}{\alpha}\cdot\frac{\overline{w}}{\overline{\alpha}}+\overline{A}\cdot\frac{w}{\alpha}+A\cdot\frac{\overline{w}}{\overline{\alpha}}+B\right)=w\,\overline{w}+\overline{C}\,w+C\,\overline{w}+D$$

となり，複素数平面上の円は円に写される．

以上から，一次分数変換 $w=\alpha\,z$ により，円は円に写される．■