

安定マッチング問題 —本学部における専修振り分けに適用する—

(数学教育講座) 河村 泰之

Application of Stable Matching Problem to Course Assignment Problem in Faculty of Education, Ehime University

Yasuyuki KAWAMURA

(平成 21 年 6 月 5 日受理)

欧文抄録

The stable marriage problem is a combinatorial problem. An instance of the stable marriage problem involves n men and n women, and each person ranks all members of the opposite sex. We seek a matching without any blocking pairs as a solution to the stable marriage problem. We call such a matching a stable matching. In this paper, we apply the Gale-Shapley algorithm, which is an excellent method for the stable marriage problem, to the course assignment problem at the school teacher training course in the faculty of education, Ehime university.

キーワード

安定結婚問題, 専修振り分け, マッチング

keyword

stable marriage problem, course assignment, matching

1. はじめに

本学部の学校教育教員養成課程において、専修振り分けは例年の課題である。毎年100名の入学生を募集し、入学後に学生の希望を考慮してすべての学生を13専修のいずれかに振り分ける。すべてを希望通りにするといくつかの専修に偏って、結果として一人も学生を持たない専修ができてしまうことも極端な例ではない。教員養成系学部の使命である計画養成が果たされず、学生の希

望のみで振り分けることはできないことがわかる。学生の今後の人生にも影響することなので、学部としても多くの時間をかけるなど、毎年、振り分けには多大な労力をかける。この問題を、専修振り分け問題と呼ぶことにする。目的は、妥当な振り分けを求めることである。

このような問題はマッチングを求めることとしてよく研究されている。単純に答えを見つける方法を考えるだけでなく、数理的な性質が明らかになっていくのはGaleとShapleyによる研究にさかのぼる。彼らは1962年に安定という性質を持つマッチングを求める問題として、安定結婚問題を紹介した^[1]。安定結婚問題の例題では、同じ人数からなる男性集合と女性集合が存在する。男性も女性も、異性全員に好みの順序をつけている。(同順位はつけない。)男性と女性の組をペアと呼び、集合Mはいくつかのペアからなる。すべての人がちょうど1つのペアに属するとき、集合Mはマッチングと呼ばれる。

あるマッチングMにおいて、自分の現在のペアの相手よりも希望順位が高い異性同士をMのブロッキングペアと呼ぶ。ブロッキングペアが存在しないマッチングを安定マッチング、ブロッキングペアが存在するマッチングを不安定マッチングと呼ぶ。つまり、現在のペアを解消して新しくペアを作り直した方が満足度が高くなるペアがいる場合は、新しいマッチングを求めようという欲求が生じるので不安定な状態と考える。

安定結婚問題

入力：人数が同じ男性集合と女性集合、各人のすべての異性に対する希望順序

出力：安定マッチング

安定結婚問題の解としての安定マッチングはGaleとShapleyにより提案された Gale-Shapleyアルゴリズムを用いて求めることができる。このアルゴリズムは、安定マッチングに関する議論では今でも基礎となる役割を果たす。Gale-Shapleyアルゴリズムは、どんな入力に対しても安定マッチングを導くことが知られている。Gale-Shapleyアルゴリズムの最悪時間計算量は $O(n^2)$ であり、また、安定結婚問題の計算量の下界は $\Omega(n^2)$ であることが知られているので、Gale-Shapleyアルゴリズムは漸的に最適なアルゴリズムであると言える。

安定結婚問題は、どんな入力に対しても少なくとも1つの安定マッチングが存在する。しかし、安定マッチングの数を求める問題は#P完全であることが知られているので、任意の入力に対して安定マッチングの個数を数える効率的なアルゴリズムは非常に難しいと考えられている。#Pは1979年にValiantによって提唱された概念で、クラスNPに属する問題の許容解の個数を計算する問題のクラスである^[2]。

2. 問題設定

安定結婚問題の拡張も多く研究されているので、ここではその成果を専修振り分け問題の用語に置き換え、安定な振り分けを求める安定専修振り分け問題として紹介する。

学生の集合を S 、専修の集合を C とする。当然、 $|S| \neq |C|$ である可能性があるので全単射を表すペアの集合は存在するとは限らない。そこで、一夫多妻（もちろん、一妻多夫でも良い。）の場合の安定結婚問題と考える。一般的には、安定配属問題の名で広まっており、病院にインターンを配属するときの利用がよく知られている。各専修はその専修の定める定員数だけ学生とペアとなることができるのと考えるのと同じである。

この問題を解くには、定員 k 人の専修を同じ希望順序を持つ k 人の男性に置き換えた安定結婚問題と考えるこ

とでGale-Shapleyアルゴリズムが利用できる。各専修の定員数の総和を学生数とした安定専修振り分け問題では、各学生がちょうど1つの専修に属すペアの集合をマッチングと呼ぶことにする。このようなマッチング M において学生 s と専修 c が次の2条件を満たすとき、 (s,c) を M のブロッキングペアと呼ぶ。

- (1) s は振り分けられた専修よりも c の方が希望順位が高い
 - (2) c にとって、 c に振り分けられた学生の少なくとも1人より s の方が希望順位が高い
- ブロッキングペアのないマッチングを安定マッチングと呼ぶ。

安定専修振り分け問題

入力：

n 人の学生集合 S

m 個の専修集合 C

各学生（ n 人分）の希望専修リスト（専修を第1希望から第 m 希望まで並べる。）

各専修（ m 個の専修）がつける希望学生の順序（第1希望から第 n 希望まで並べる。）

各専修の定員（ m 個の定員数の和は n ）

出力：

安定マッチング

3. 本学部における安定専修振り分け問題へ適用するときの問題点

Gale-Shapleyアルゴリズムは安定という性質を持つマッチングを求めることができることは示されているが、求められたマッチングに学生はどのくらい満足できるのだろうか。実際に試すデータが手元にないので計算機によるシミュレーションを行う。本学部の学校教育教員養成課程の募集人数は100名で、専修は教育、心理、幼年、国語、社会、数学、理科、音楽、美術、体育、技術、家政、英語の13専修（すべて略称）がある。図1に100名の学生が全くランダムに専修を希望したと仮定して作成した希望リストを示した。図2には各専修が100名の学生をどのような順位で希望するかやはり全くのランダムなデータを作成したものを示した。図2の専修名の後ろには（ ）内に定員を示した。これらのデータを入力

として、学生の希望を優先した student-oriented Gale-Shapley アルゴリズム (性質等は後述する) を実行すると、第 1 希望に振り分けられた学生が 50 名、第 2 希望 26 名、第 3 希望 17 名、第 4 希望 4 名、第 5 希望 2 名、そして第 8 希望 1 名で安定したマッチングが得られた。図 1 での網掛けで得られた安定マッチングの様子を示している。実に 93% の学生が第 3 希望以内の専修に振り分けられた結果となる。しかしながら、もちろん実際は学生の希望する専修は (専修が希望する学生も) ランダムではなく、偏りが生まれるのが普通なので、このように希望通りに振り分けられることは期待できない。

実際に専修振り分けを行う際に、問題を困難にしている要因を列挙してみる。

(1) 制度自体

学校教育教員養成課程として区別なく入学した学生を専修に振り分けるので問題が生じる。根本的に入試制度を改革して、専修ごとで募集すれば少なくとも専修振り分け問題は起こらないが、他の問題が生じることは容易に想像できる。数理問題以外の側面が強くなるので、制度に関しては考えないことにする。

(2) 希望が偏っていること

学生集合から出される第 1 希望が専修の定員通りならば全員の希望が通る。しかし、そんな奇跡を期待することはできない。希望を取れば偏るのは自然な結果である。偏った中でどのようなマッチングを考えるかが重要である。専修の定員などを考えずに学生の希望通りに専修を決定すると、ある専修には学生がものすごく多くなった場合はその専修の負担が増え、ある専修に学生がいなくなった場合はその教科の教員を輩出することが難しい。

(3) 専修の受け入れ上限の設定

過去に行われた専修振り分けでは、専修が受け入れる学生数の上限を設定して、それ以下の振り分けになるようにしていた。学生の希望をできるだけ尊重しようという配慮から生まれた工夫であるが、いくつかの専修に数名ずつ多く学生を振り分ければ簡単に学生の振り分けられない専修が生まれる。その扱いをどうするのか曖昧なまま上限を設定していることは問題をややこしくしている。

(4) 希望調査の情報量不足

希望調査をするときにいくつかの希望しか調査してい

ないと、希望がすべて競合した場合に希望から外れる学生がいる。それらの学生を、何を基準にして振り分けるかがわからない。学生の希望を優先するなら必要なだけ情報を収集しなければならない。

4. student-oriented Gale-Shapley アルゴリズムの特徴

Gale-Shapley アルゴリズムは適切に改良すれば、専修の振り分け人数を定数とした 1 対多のマッチングへ自然に拡張できる。このとき、すべての学生がすべての専修の希望順序をつけ、すべての専修がすべての学生の希望順序をつければ、安定マッチングの存在は保証されているし、それを簡単に求めることもできる。学生の希望を優先した場合が student-oriented Gale-Shapley アルゴリズムで、専修の希望を優先した場合は course-oriented Gale-Shapley アルゴリズムである。どちらを優先しても、アルゴリズム的な性質は変わらない。

安定マッチングの候補は複数あることが考えられるが、その候補をすべて調べるのは現実的ではない。Gale-Shapley アルゴリズムではどんな順序で解を探しても、最終的に得られる安定マッチングは数ある候補の中から同じ 1 つを確実に出力する。

すべての情報を得ることができる学生がいて、ずる賢く嘘の希望順序を提出したとしても、真の希望順序を提出するよりも得をすることができない。1 人ではなく何人の学生が示し合わせても真の希望順序の意味で得をすることはできない。たとえば、専修と裏取引をしたとしても、取引に関わるすべての者が得をすることはできない。

5. 専修の振り分け人数の制約

専修の振り分け人数を定員から上限以下と緩和した場合は、ブロッキングペアの定義を次のように変更することで、ブロッキングペアのない安定マッチングを 1 つ求めることができる。

マッチング M において学生 s と専修 c のペア (s, c) がブロッキングペアである

\Leftrightarrow 学生 s と専修 c が次の 2 つの条件を同時に満たす

- (1) c に振り分けられる学生数が c の振り分け人数の上限より小さい、または、 c に振り分けら

れている学生の少なくとも1人よりcがsを希望する順位が高い

- (2) sがどの専修にも振り分けられていない、または、sが振り分けられている専修よりもcを希望する順位が高い

ただし、その安定マッチングでは、1人も振り分けられない専修か、どの専修にも振り分けられない学生が存在する可能性がある。

そこで、1つの専修に振り分けられる学生の最小人数を保証したい場合を考える。つまり、各専修に振り分け人数の下限も追加して、ある専修に振り分けられる学生数を上限以下かつ下限以上にする場合を考える。この問題では一般には安定マッチングが存在しない。安定な答えが存在しないので、例えば、ブロッキングペアに含まれる学生の数を最小化する問題を考える。実は、すべての専修が学生集合に対してまったく同じ希望順位をつけると制限して、各専修の振り分け人数の上限と下限を設定し、ブロッキングペアに含まれる学生数を最小化する問題はNP困難である（つまり、この問題を解く効率的なアルゴリズムが見つかった場合、効率的に解くことはできないと考えられているNPと呼ばれるクラスの問題も同様に解けてしまうことになるくらい難しい問題である。）ため、最小化することは現実的ではない。近似的に求めることは可能である。

6. おわりに

希望調査をするとき、面倒でも同順位のない全順序をつけると誰も疑うことのない方法で安定したマッチングを求めることができる。しかし、そのマッチングは機械的に求めているため、希望が偏っている場合、ある学生やある専修だけが極端に希望がかなわないことは平気で起こる。安定だけを求めては何か不満が残るということは、Gale-Shapleyアルゴリズムが提案されてから40年以上経つ今でも類似の問題の研究が続けられていることから想像できる。

例えば、本学部の現状では振り分け人数の制約を緩和した問題を考えている。厳密な定員を設けずに上限や下限を設定するのならば、それによって生まれる問題を検討しておくべきである。上限を設定した場合は1人も学

生が振り分けられない専修が生まれ、上限と下限を設定した場合は最適な答えを見つける効率的なアルゴリズムは期待できないことが数学的に証明されている。

参考文献

- [1] D.Gale and L.S.Shapley, College admissions and the stability of marriage, *American Mathematical Monthly*, 69:9–15, 1962.
- [2] L.G.Valiant, The complexity of computing the permanent, *Theoretical Computer Science*, 8 (1979), 189–201, 1979.

