

新道具主義数学教育における授業（1）

（数学科教育研究室） 藤 本 義 明

Teaching in New Instrumentarism of Mathematics Education (1)

Yoshiaki FUJIMOTO

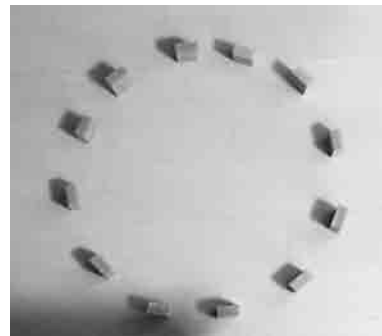
（平成24年6月5日受理）

I はじめに

初期デュイ哲学をもとに新道具主義数学教育の構築を標榜してきた。（拙稿 2010） そのためには、新道具主義数学教育としての授業実践を行うことが要となる。前稿（拙稿 2012）では、暫定的に指導事例を2つほど想定し、新道具主義数学教育として実践するのにどのような課題が考えられるかを検討した。これを受けて、本稿以降では、小学校算数と中学校数学の指導内容に対して、授業の指導案を作成し、授業実践を試みて行きたい。その第1として、本稿では、小学校3年の円、5年の割合、中学校1年の立方体の切断、3年の三平方の定理の指導案を作成する。前稿で示したように、学習指導要領で指定された内容に対し、各単元を導入活動、展開活動、応用活動の3期に分け、それぞれ、指導案を作成する。新道具主義数学教育の理念上、導入活動で数学を道具として用いることが重要である。したがって、導入活動については、各内容の道具性の捉え方を明記するようにした。また、応用活動でも得られた知識・技能を道具として扱うのは必定であるから、ここでも、その道具性について言及していく。残念ながら、時間的に作成した指導案で授業実践をする所までは至っていないが、今後、できるだけ授業実践で検証していきたい。

円の内包、つまり性質を考えさせることはむずかしい。道具として使いながら、円の形を構成させることが大切であると考え。そこで、指導案1-1では、運動会の団体競技のフォーメーションづくりに円を用いるという設定にした。実際のフォーメーションが円の形になるように徐々に修正をしていくことで、円の形のイメージ事態も修正されていくものと捉えている。ただし、運動場に描かれた円をワイヤレスカメラで映し出すことで、円の修正をさせたいのだが、運動場を真上から見ることは難しいので、校舎の屋上といったななめ上方から見ないとけない。ななめ上方からの映像が、どの程度円と捉えられるのかという課題がある。シミュレーションとして、3階屋上あたり（高さ17m）にワイヤレスカメラを設置して、12人の子どもがすわった状態で直径5mの円を作る場合を想定して、写真撮影を試みた。順に、カメラから0m、5m、10m離れた円を示している。このシミュレーションによると、0mのときはもちろんだが、5m離れる場合も円と認識されるだろう。しかし、10m離れると若干円がゆがんで見える。したがって、指導案1-1、1-2の活動は、ワイヤレスカメラから10m以内の運動場に円を作って行うと良い。

0 m



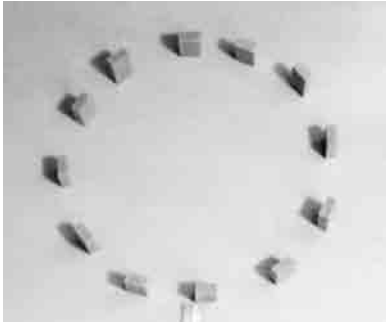
II 小学校3年：円

1. 導入活動

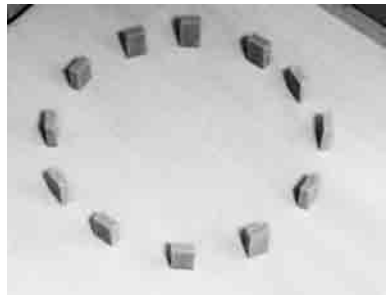
(1) 円の道具性

「円」は図形としての概念であり、概念の外延としては円の形が考えられ、概念の内包としては中心からの距離が一定であることがあげられる。道具としての円は、その内包に由来するが、小学校3年生では、導入段階で

5 m

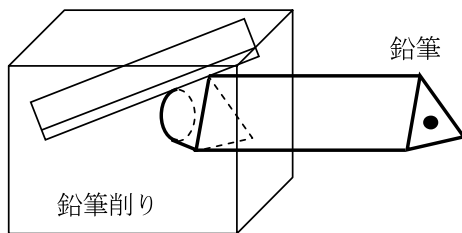


10 m



ただし、個人で空中撮影ができる機材も売り出されている。

このほかにも、ロクロで円形の皿を成形する、板で粘土のひもを丸く伸ばす、スケルトンの鉛筆削りで鉛筆を削る、といった構成の活動が考えられる。これらは、個人の活動であるので、団体の活動となっている運動会のフォーメーションづくりとは異なる。



(2) 指導過程

指導案1-1は、表現活動として取り上げられる運動会でのダンスのフォーメーションを円をつくることを題材にしている。児童がもっている丸い形という意識を道具として用いながら、より洗練した円の形へ深めていくものである。はじめに、児童の最初のイメージで円をつくり、カメラの映像を利用して、円を徐々に修正させていく。そして、初めの円と修正した後の円との違いを考えさせる。円のイメージとして、でこぼこがない、どこも曲がるのが均等であるという捉え方をはぐくみたい。

指導案1-2は、円の内包から円の理解をさせるもので、中心から等距離にある点の集まりが、指導案1-1で捉えた形と同じであることを理解させる。はじめ、玉入れの競争で、かごからの距離に差をつけることにより、かごから距離が異なると不公平が生じることを理解させようとした。ただし、かごからの距離が異なるだけでは、結果が分かりすぎる懸念があるので、遠いと1玉あたり得点が増えるように得点に差をつけた。これにより結果を予測しにくくしたが、逆に、距離による有利・不利がわかりにくいので、等距離で得点異なる要素も加味させた。そして、全員を公平にするという課題で、かごから等距離であることを理解させ、出来上がる点の全体が円になることを理解させようとした。

2. 展開活動

(1) 指導過程

円の展開活動は主にコンパスの使い方にある。コンパスの技能の習得の過程は、運動会の表現活動とはつながりにくいので、新道具主義数学教育としての活動は割愛する。

3. 応用活動


(1) 円の道具性

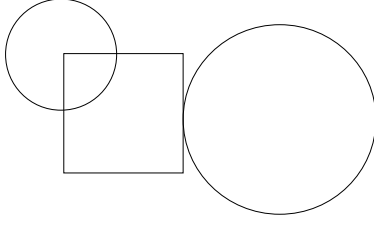
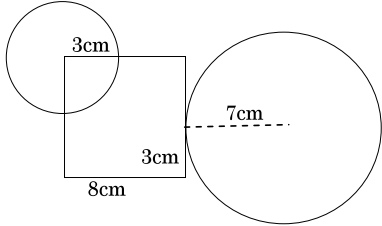
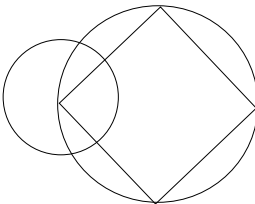
獲得された円の性質やコンパスの技能を、運動会の表現活動に道具として使うようにする。指導案1-3のように、円と正方形でダンスのフォーメーションをえがくのに円の性質やコンパスの技能を使用する。その際、与えられたフォーメーションのデザインに対して、それをコピーして描くために必要な情報を読み取る活動が大切であると考えられる。

(2) 指導過程

指導案1-3は、運動会のダンスのフォーメーションのデザイン画を与え、それをコピーして描かせる活動から始め、定規やコンパスを正しく使うための活動をさせる。その際、コピーして描くのに必要な情報を発表させる。次に、表現活動の一環として、円と正方形を用いたフォーメーションのデザインを各自に行わせる。ただし、後の活動で混乱が生じないように、円は2つ、正方形をは1つという個数や、円の中心や正方形の頂点や辺を目安にすること、くっつけたデザインにすることなどの制限を設ける。最後に、ペアになってデザインを交換させ、再び、相手のデザインをコピーして描く練習をさせる。

指導案 1-1		
学習活動	教師の働きかけと予想される児童の反応	指導上の留意点
1. 導入	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> 運動会で、輪になってダンスをします。きれいな輪になる練習をしましょう。 </div>	
2. 展開 (1)最初の円	<ul style="list-style-type: none"> * 2つのグループをつくる ・ 運動場にダンスで使う円を描こう。 * 各グループは、協力して運動場に棒で2つの円を描く。 ・ 上手く描けるかな。 ・ ぐるっと回れば上手くかけた ・ 周りの人の円と比べてみよう。 ・ Aグループの円はきれいだな。 ・ Bグループはとても大きな円をかいているぞ。 	<ul style="list-style-type: none"> * 一人一人にかかせたり、ペアやグループでかかせたりして、円をかくことに慣れさせる。
(2)円を修正する	<ul style="list-style-type: none"> * 二手に分かれてきれいな円になろう。2グループのうち、一方のグループは手をつないで円をつくる。他方のグループは正しい円になるように指示を出す。 ・ Cさんは1歩中へ、D君は半歩中へ ・ Dさんは、もっと右だよ！ * 教師は、出来上がった円を棒でなぞる。 * 両グループの役割を交代して、同様の活動をする。 	<ul style="list-style-type: none"> * 児童が円になったところを教師がなぞることで、児童全員が円を確認できるようにする。 * ワイヤレスカメラを用いて円のつもりでかいた図形がどのようになっているか確認する。 * 円をつくる人と修正をする人に分かれてその場で修正させる。 * 児童が手をつなぐことのできる適度の大きさの円をつくらせる。
3. まとめ	<ul style="list-style-type: none"> * 最初につくった円と比べてみよう。 ・ 最後の円が一番きれいに見えるのはどうしてだろう。 ・ 何か秘密があるのかな。 ・ 最後の円は、でこぼこがないから、きれいに見えるよ。 	<ul style="list-style-type: none"> * はじめに自由につくった円と修正しながらつくった円の相違点に着目させる。

指導案 1-2		
学習活動	教師の働きかけと予想される児童の反応	指導上の留意点
1 導入 長方形の位置から、得点にハンディをつける	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> 運動会の玉入れ競争をしよう </div> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle; margin-left: 20px;"> ①  ② かご ③ ④ </div>	<ul style="list-style-type: none"> * 運動場や体育館など広い場所で実際に玉入れを行わせる。 * 第1～第4グループに分け、それぞれ同数の玉を投げて、入った得点を競わせる。ただし、グループの数値が1つの玉の得点とする * たくさん入った児童、あまり入らなかった児童の意見を聞き、かごからの距離を決める必要性に気付かせる。
2 公平な競争	<ul style="list-style-type: none"> * グループ単位で、玉入れ競争をする。 1点から4点のハンディがある。 ・ かごの近くだから入れやすいよ ・ 近くだと、かごがじゃまだな ・ 遠くだから、たくさん点が入られるよ ・ 玉入れで気付いたことはあるかな ・ みんなが近くに行くと、うまく投げ入れられないよ ・ 近くの人はいいけど、遠くから投げる人には不公平だよ * 全員同じ得点で一人ずつの競争にします。どんなルールを追加すれば不公平ことがなくなるでしょうか。 ・ 投げるときの位置を決める ・ 四角形だと角に近い人が不利だ ・ みんなが同じ位置から投げるには、どうすればいいかな ・ 公平に玉入れのできる立ち位置を決めよう。 ・ かごからみんなが同じくらい遠くになればいい ・ かごからみんなが同じ位置に立つと、どんな形になるのかな 	<ul style="list-style-type: none"> * 児童が思いついた形（直線・四角形・三角形・円形）をそれぞれ試させる。 * 棒や紐を使ってかごから全員が同じ位置に立てるようにする。 * 全員がかごから同じだけ離れた図形がどのようなものか分かるように屋上から見たり、ワイヤレスカメラで撮って確認したりする。
3 円のかき方	<ul style="list-style-type: none"> * 円をグラウンドにかいてみよう。 ・ みんなで手をつなぐと、どうかな ・ どんな道具を使えばかけるかな ・ 棒や紐をつかうとできるかもしれない 	<ul style="list-style-type: none"> * 円をグラウンドにかくことで、コンパスで円を作図する活動の導入とする。

指導案 1-3		
学習活動	教師の働きかけと予想される児童の反応	○指導上の留意点
1 導入	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-bottom: 10px;"> 運動会の団体競技でダンスをします。各自の立つ位置をデザインしましょう。 </div>	
2 展開 (1)コピーして描く	*円と正方形でのデザインです。同じデザインをかこう。 	*同じデザインをかくために必要な情報を考えさせる。 
(2)自分でデザインする	<ul style="list-style-type: none"> ・どこの長さを測ると良いかな ・円の中心はどこかな ・正方形の辺と円がくっついているよ ・正方形の頂点が円の中心になっているな *円と正方形を使ったデザインをしよう。 	*円2つと、正方形1つを使ってデザインさせる。 *円の中心や頂点を使ったり、くっついたり（接したり）させてデザインさせる。
3 練習	*友達のをデザインをかこう。	*ペアになり、互いのデザインを交換して、相手のデザインをかく。

Ⅲ 小学校5年：割合

1. 導入活動

(1) 割合の道具性

「割合」は、同種の2量の関係で、もとにする量の大きさを1とみたときの比べる量の大きさのことであり、もとにする量の大きさを1とみることが本質であろう。割合の道具性を考えるとき、もとにする量の大きさを1とみることがいかに自然に、有意義なものとして行うかに着目した。そこで、指導案2-1にあるように、菓子の詰め合わせを素材とした。それは、1箱をもとに、1箱の半分とか、2箱と半分のように、1箱が自然と1とみる姿勢につながっていると考えられるからである。さらに、割合を小数で表そうとすると、1.2倍や0.5倍といった十進記数法としての量感が大切になる。したがって、1箱に入れる菓子の個数を10個とすることで、十進記数法としての量感を捉えやすいものにした。

(2) 指導過程

指導案2-1にあるように、1箱10個入りの菓子箱

に、①ではプリンが半箱分、ようかんが1箱半分、ケーキが2箱分入っている。1箱をもとにして、それぞれが何倍入っているかを考えさせる。ケーキの2倍を手掛かりに、ようかん1.5倍、プリン0.5倍を理解させる。同様にして、②で1箱分1に対して、プリン0.8、ようかん1.2であることを理解させる。そして、菓子の個数に基づきながら、割合が、(くらべる量) ÷ (もとにする量) で求められることを整理する。

2. 展開活動

(1) 指導過程

割合の展開活動は、百分率や歩合(割・分・厘)の指導が主である。指導案2-2では、導入活動の菓子箱を題材にその値段を考えさせている。日常生活において、何%引きとか何割りセールなど、買い物と関わりが深く、また、そのような場面での児童のとまどいも多くみられるので、菓子箱の値段をもとに、百分率を指導する。さらに、歩合については、野球の打率において聞く機会が多いと思われるので、イチロー選手の打率を考えさせて

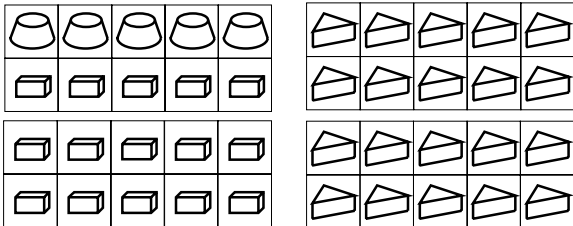
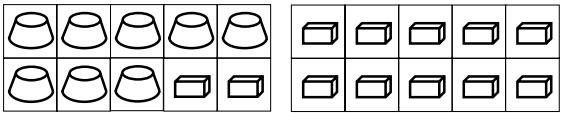
いる。

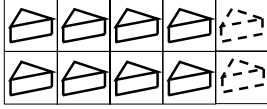
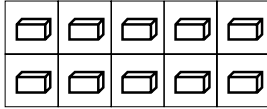
はいろいろなものが考えられる。典型的な文章題を扱うこともよいであろう。そのような事情であるから、本稿では、割合の応用活動の提示は割愛した。

3. 応用活動

(1) 割合の道具性

割合は素朴な基本的概念であるから、応用活動として

指導案 2-1		
学習活動	教師の働きかけと予想される児童の反応	指導上の留意点
1. 導入 菓子個数を倍で比べる	<p>①</p>  <p>*①のように、3つの箱に、プリンとようかんとケーキが入っています。それぞれの数を比べてみて、どんなことがわかりますか。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ようかんは15個ある ・プリンが少ない、5個しかない ・プリンの数と羊かんの数はどんな関係がありますか。 ・3倍 ・3分の一 ・ようかんはプリン3倍 	<p>*自由に意見を言わせる。</p> <p>*2つの菓子の個数の関係を考えさせる。</p> <p>*箱を単位に考えさせる。</p>
2. 展開 (1) 箱を1と見た、単純な割合	<p>*1箱をもとに考えましょう。ケーキは何箱分ですか、羊かん、プリンは何箱分ですか。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ケーキは2箱、ようかんは1箱と半分 ・1箱を1とみて、ケーキはその2倍、ようかんは10個と20個の真ん中だから、1.5倍になります。 ・ぷりんは1倍の半分だから、0.5倍だ。 	<p>*ようかんはそれ自体の個数として1箱半あり、倍関係として、1倍と2倍の真ん中にあることを理解させる。</p> <p>*プリンは0.5と1の間、ようかんは1と1.5の間であることを意識させる。</p>
(2) 少し複雑な割合	<p>*②では、1箱をもとにすると、プリンとようかんは何倍ですか。</p> <p>②</p> 	<p>*これまで求めた倍関係が、計算で求められることを確認する。</p>
(3) 割合を計算で求める	<p>*プリンは0.8倍、ようかんは1.2倍 ようかんはプリン何倍ですか。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・2倍と半分だから、1.5倍 ・$12 \div 8 = 1.5$ だから1.5倍です。他の何倍かも計算でたしかめましょう。 ・①で、$15 \div 5 = 3$ だから、ようかんはプリン3倍 ・①で、$15 \div 20 = 0.75$ だから、ようかんはケーキの0.75倍 ・②で、$8 \div 12 = 0.67$ だから、プリンはようかんの0.67倍 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <p>くらべる量 ÷ もとにする量 = 割合</p> </div>	<p>*これまで求めた倍関係が、計算で求められることを確認する。</p>
3. 練習	<p>[問]お兄さんの身長は154cmで、ゆう子さんの身長は140cmです。お兄さんの身長はゆう子さんの身長の何倍ですか。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・くらべる量がお兄さんの身長で、もとにする量がゆう子さんの身長だから $154 \div 140$ で1.1倍 	<p>*比べる量ともとにする量は何かを押さえる。</p>
4. まとめ	<p>*全体で、公式を中心に本時のまとめを行う。</p>	

指導案 2-2		
学習活動	教師の働きかけと予想される児童の反応	指導上の留意点
1. 導入 割合の復習	<p>* 1箱定価 2000 円のケーキを 2 個分安く売ります。定価の何倍にあたりますか。</p> <p>・ $1600 \div 2000$ だから 0.8 倍だね。</p> 	* 割合の復習をする。
2. 展開 (1) 百分率の定義	<p>* 割合を表すのに百分率を使うこともあります。百分率では 0.01 倍のことを 1% といいます。0.8 倍は 80% です。</p> <p>・ では、20% 引きで買えたってことだね。</p>	* 百分率の定義をする。日常のセールと重ね合わせて説明する。
(2) 問題を解く	<p>* ようかんは定価 800 円です。25% 引きで売るとねだんはいくらでしょう。</p> <p>・ 0.75 倍だから 800×0.75 で、600 円だね。</p> 	
(3) 割合 1 と 100%	<p>* 定価どおりだと、何% で売ることになりますか。</p> <p>・ 100%</p>	* 割合の 1 が 100% にあたることを確認する。
(4) 問題を行う。	<p>[問] バスの定員は 60 人で、今、定員の 40% の人が乗っています。バスには何人乗っていますか？</p> <p>・ 60×0.4 だから、24 人だね。</p>	* 割合の式を逆に利用して問題を解かせる。
(5) 歩合の定義	<p>* 歩合では、0.1 倍を 1 割、0.01 倍を 1 歩、0.001 倍を 10 厘といいます。</p> <p>・ 例えば、百分率の 25% は、歩合で表すと、2 割 5 歩っていうことだね。</p>	* 歩合の定義をする。
(6) 問題を解く	<p>[問] イチロー選手は打数が 300 打数のとき、ヒットの打率が 2 割 8 分でした。何本ヒットを打ったでしょう。</p> <p>・ 300×0.28 だから 84 本ヒットを打った</p>	* 野球の打率を意識させる。
3. まとめを行う。	<p>* 百分離、歩合、割合の式を逆に使うことを中心に、本時のまとめを行う。</p>	

IV 中学校 1 年：立方体の切断面

1. 導入活動

(1) 立方体の切断面の道具性

「立方体の切断面」は、立方体を切断してできるさまざまな切断面の図形としての関連性についての考えである。その道具性を保証するために、指導案 3-1 のように、消しゴムはんこをつくる時、面の形をいろいろ変えて、面白い形をしたものをつくるという場面を設定した。

(2) 指導過程

指導案 3-1 は、立方体の消しゴムをもとに、立方体を平面で切るといろいろな形の切断面が現れることから、いろいろな形の面をもった消しゴムはんこを作ることを題材にしている。はじめ、グループに、切断面の多角形を指定して、念頭操作によって、与えられた多角形を切断させる活動をする。それから、実際に立方体を切断して、念頭操作が正しかったかどうかを確認させる。

立方体を切って形を確認するだけでは、小学校 3・4 年生程度でもできることであり、中学生の活動としては念頭操作で立体を把握できることが大切である。また、実際に立方体を切断するとき、本物の消しゴムを使うことは、コスト的にいろいろな切り方を試みるのが難しくなるし、大きさ的にも手作業が難しい。したがって、市販の発泡性の建材（断熱材）やメラミンスポンジを使って大きめの立方体を多数用意しておいて、いろいろに切らせることが有効である。そのあと、切断に関するさまざまな性質を考えさせ、最後に、切り方と切断面の関係を整理させる。立方体の切断面では、最後の整理のさせ方も重要な活動である。ただし、ヒントなしで整理するのは中学校 1 年生には難しいと思われるので、立方体の上面は必ず切るという条件を与えて、整理しやすい状況を与えてやろうとした。

2. 展開活動

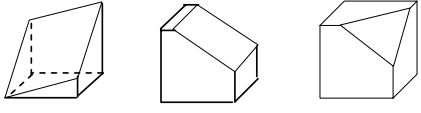
(1) 指導過程

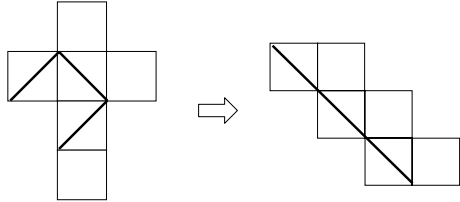
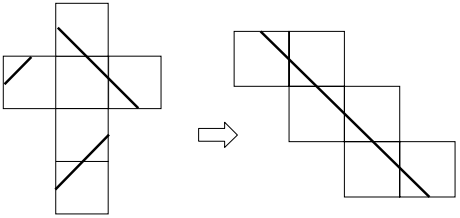
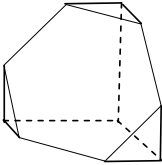
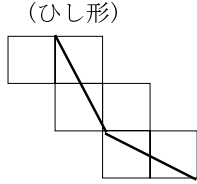
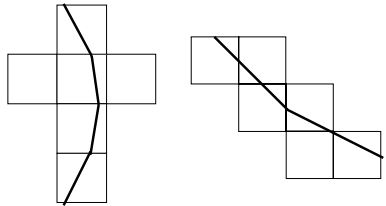
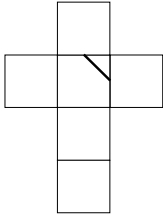
指導案3-2は、立方体の切断の様子を展開図に表す活動である。その際、切断面が正三角形、正四角形（正方形）、正六角形であるときには、切断面は展開図上で1本の直線となる。正三角形においてこの性質を確認し、正四角形、正六角形の場合も調べさせる。また、「正」でないときは一直線にならない理由も考えさせる。

立方体の切断面を応用活動にする場合、切断面についてまとめられた知識を活用することになる。しかし、立方体の切断面は、立体図形に対して操作的活動することに意味があるのであって、知識を得ることに意味があるわけではない。したがって、立方体の切断面の応用活動は意義が乏しいので、本稿では割愛した。

3. 応用活動

(1) 立方体の切断面の道具性

指導案3-1		
学習活動	教師の働きかけと予想される生徒の反応	指導上の留意点
<p>1. 導入 消しゴムハンコについて</p> <p>2. 展開 (1) 指定された多角形におけるいろいろな形</p> <p>(2) 切り方と切断に関するいろいろな気づき</p> <p>(3) 上面を固定して、切り方と切断面の形を整理する</p> <p>3. 宿題</p>	<p>* グループで3種類の多角形のはんこをつくらう。 ・ 四角形と三角形はできそう。 ・ 五角形は難しい</p> <p>* 切り方と完成予想図（見取り図）をかこう。 ・ 上面の対角線から切り込むと三角形ができそうだ。 ・ 対角線をまっすぐ垂直に切ると長方形ができる。</p> <p>* 設計図を基に、特徴的な形になるよう、消しゴム（発砲性建材等で代用）を切断しよう。 ・ 予想通り台形ができた。 ・ 正五角形はできないけど正六角形はできる ・ 直角三角形ができない。</p> <p>* 切り方とできた断面を発表しよう。 ひし形 長方形 三角形</p>  <p>・ 切り方と実際にできた切断面を見て気づいたことをグループで話し合おう。 ・ 必ず平行になる辺の組をもつ。 ・ 直角をつくれなから直角三角形は無理だ。 * 上面は必ず切るとして、切り方と切断面の形を整理しよう。 ・ 上面と隣り合う2つの側面を切ると三角形になる （上面の対角線から切り込み、三角形をつくる時、点が辺上を下降するほど大きな三角形ができる） ・ 上面と3つの側面を切ると四角形（台形）になる ・ 上面と下面を切るとき、2つの側面を切ると四角形（平行四辺形）になり、4つの側面を切ると六角形になる （上面に鉛直に切ると四角形になる） （上面と下面の対角にある頂点を含むように、上面と下面を切ると、ひし形になる） ・ 上面の隣り合う2辺と、2辺の交点と対角をなす下面の頂点とを切ると五角形になる * 形を一つ決めて消しゴムはんこを完成させる（宿題）。</p>	<p>* つくる形を先に指定して切り方を予想させる。</p> <p>* 班によってつくる多角形の種類を指定する。 三角形（二等辺三角形、正三角形） 四角形（正方形、台形、ひし形） 五角形と六角形</p> <p>* 扱いやすいように、発砲性建材（もしくは、メラミンスポンジ）を3cmの立方体にして多数用意する。</p> <p>* 立方体のどこを切るのかを考えやすくするために板書用の図を用意しておく。 * けがのないよう、カッターでゆっくり切るように注意する。</p> <p>* なぜ直角三角形ができないのか考えさせる。</p> <p>* 整理しやすいように、上面は必ず切るという前提を置く。（切られる面が全くないという切り方はないから） * 図と切り口を比較しながら気付いたことを発表させる。</p>

指導案 3-2		
学習活動	教師の働きかけと予想される生徒の反応	指導上の留意点
<p>1. 導入 展開図を予想する</p> <p>2. 展開 (1) 切断面を展開図に描く</p> <p>(2) 一直線になるか確かめる</p> <p>(3) 正多角形のみが、一直線である</p>	<p>* グループでつくった立体を立方体の展開図にかいてみよう。</p> <p>・通っている点を写して直線で結べばできる。</p> <p>* 五角形はどうなっているのだろう。</p> <p>・正三角形は一直線になる。</p>  <p>* つくった展開図を組み立ててみよう。</p> <p>・予想通り予想通りの形ができた。</p> <p>・正六角形も一直線だ。</p>  <p>* 立方体を切断してできる立体とその展開図を比べよう。</p> <p>・正多角形の展開図は一直線になる</p> <p>・正六角形の展開図は一直線だけど普通の六角形は一直線じゃない。</p> 	<p>(ひし形)</p>  <p>(平行四辺形) (五角形)</p>  <p>* 正六角形の上面の切り方は同じ(中点を結ぶ)で、他の点を中点でない点を通るようにしても六角形になる。しかし、上面以外は切る位置が違うので、全体が直線になることはない。</p> 

V 中学校 3 年：三平方の定理

1. 導入活動

(1) 三平方の定理の道具性

前稿(藤本 2012)では、三平方の定理の暫定的指導案として、衝立をつっかい棒を使って垂直に立てることを題材とした。それは、三平方の定理を空間内で利用するものであった。三平方の定理は平面内で利用することも可能である。指導案 4-1 は、平面において三平方の定理を道具として利用するために、引き戸を少し開けてつっかい棒で支えることを題材とした。風通しを良くする、猫を往来させる、戸外の人と話をするとという想定で、引き戸を少し開けることの必然性を説明している。平面の方が立体の場面よりもわかりやすい。ただし、衝立を立てるときは斜辺の長さの 2 乗が 10000 で一定であるの

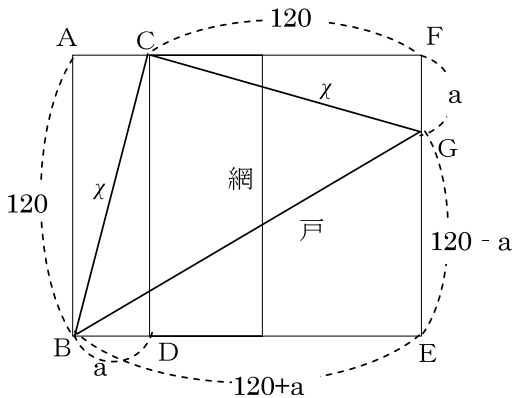
に対して、戸のつっかい棒では、斜辺の長さの 2 乗が変化する。戸のつっかい棒の場合は、10000 というようなきれいな定数値がないので、三平方の定理に気がつきにくいのではないかという懸念はある。

(2) 指導過程

指導案 4-1 は、活動の模範として、教師が教室のドアで隙間を空けながらつっかい棒をすることを示すことから始める。生徒の援助を得て、各隙間に対して必要なつっかい棒の長さをメジャーで測る。そのあと、グループごとに、教室や廊下の窓を使って、同様の測定をさせる。このあと、つっかい棒を斜辺とする直角三角形に目をつけて、(底辺の長さ)²+ (高さ)²= (つっかい棒)²であることに気付かせる。三平方の定理の証明につながるために、単なる測定値を理論的なより正しい値に訂正す

るという段取りで、図を用いて直角三角形の斜辺の長さの理論値を求めさせている。そして、最後に三平方の定理としてまとめをする。ただし、理論値を求めるとき、窓とは関係のない図が登場することが気になる。このことを、次のような指導で改善することは可能である。

図のように、右側の戸に1辺120cmの正方形の網戸CDEFを付ける。つかい棒が作る直角三角形の底辺BDをa cmとし、網戸の上からa cm下がった位置に点Gをとる。



長方形ABEFの面積を考えると、△BCGは直角二等辺三角形であることから

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(120+a)(120-a)}{2} + \frac{120a}{2} \times 2 = 120(120+a)$$

$$x^2 + (120+a)(120-a) + 240a = 240(120+a)$$

$$x^2 + 120^2 - a^2 + 240a = 2 \times 120^2 + 240a$$

$$\text{よって、} x^2 = a^2 + 120^2$$

斜辺xの理論値を、このような網戸を使った考えから求めさせることもできる。指導案4-1のオーソドックスな図と網戸の正方形を用いた図と、どちらがよいのか、考え方は分かれる所である。新道具主義数学教育としては、流れが生かされている後者の方を推したい。

2. 展開活動

(1) 指導過程

前稿（藤本 2012）で示したように、三平方の定理における展開活動は、定理の証明が主である。したがって、証明自体は導入活動と独立したものだが、ここでの導入活動では測定値を理論値で見直す活動をさせているので、この際に用いた図や図の利用の仕方を三平方の定理の証明に生かすことは有効である。したがって、指導案4-1では、三平方の定理の導入から証明までを一気に完成させる展開にしている。

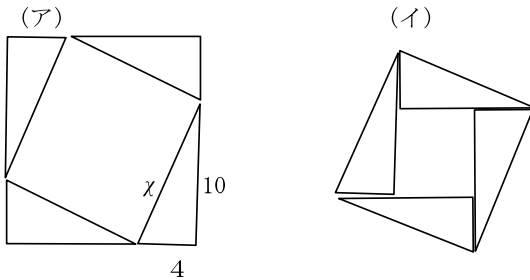
指導案4-1								
学習活動	教師の働きかけと予想される生徒の反応					指導上の留意点		
1. 導入	*引き戸を開かないように棒で工夫しよう。					*教師がドアで実演し、棒の使い方を押さえる。 *伸縮性の物干し竿を用意し、隙間の変化に合わせた物干し竿の長さを測る。		
	・引き戸の閉まり具合と棒の長さの関係について考えよう。 (i)完全に閉まっている(隙間の長さ: 0 cm) (ii)猫が通れるようにする(隙間の長さ: 10 cm) (iii)風通しをよくする(隙間の長さ: 20 cm) (iv)戸の向こう側の人と話す(隙間の長さ: 30 cm)							
2. 実験値から三平方の定理を推測する		棒の長さ: x	戸の高さ: a	隙間の長さ: c	戸の重なっていない部分の長さ: b			
	(i)	215.5	200	0	80			
	(ii)	212.0	200	10	70			
	(iii)	208.5	200	20	60			
	(iv)	206.3	200	30	50			
	*窓の戸で(高さ120cm)、いろいろな隙間の場合を調べて表をうめよう。							
		x	x ²	a	a ²	c	b	b ²
	(i)			120	14400	0	70	4900
(ii)			120	14400	10	60	3600	
(iii)			120	14400	20	50	2500	
(iv)			120	14400	30	40	1600	
(v)			120	14400	40	30	900	
(vi)			120	14400	50	20	400	
(vii)			120	14400	60	10	100	
*三人組にメジャーを渡し、ドアや教室の窓、廊下の窓を使って実際に調べさせる。 *調べた結果と見つけた関係性を全体に発表させる。 *直角三角形を意識づけるために、隙間の長さとの関係性のみが出た場合、戸の重なっていない部分の長さとの関係性に注目するように助言する。								

3. 理論値を求めて三平方の定理にせまる

- ・表から関係性を見つけよう。
 - ・隙間の長さが長くなると棒の長さが短くなる。
 - ・戸の重なっていない部分の長さが短くなると棒の長さが短くなる。
- *定理を確認しよう。
- (1) 棒の長さが 216cm のとき $216 \times 216 = 46656$
- ・戸の高さを 2 乗すると 40000
 - ・戸の重なっていない部分の長さを 2 乗すると 6400
 - ・2 つを足すと同じくらいになるね。
- (2) 棒の長さが 208cm のとき $208 \times 208 = 43264$
- ・隙間の長さを 2 乗すると 400
 - ・戸の重なっていない部分の長さを 2 乗すると 3600
 - ・隙間の長さは関係ないのかな。

$$\chi^2 = a^2 + b^2$$

*直角三角形の斜辺の長さの正確な値を求めよう。
 (1) 戸の高さ 200cm、戸の重なっていない部分の長さ 80cm の場合



(ア) 斜辺の長さを χ cm とする
 大きい正方形の一辺の長さ: $10 + 4 = 14$
 一辺が χ cm の長さの正方形の面積は

$$14 \times 14 - 4 \times \frac{4 \times 10}{2} = 116$$

χ の長さ: $2\sqrt{29}$ cm
 よって実際の棒の長さは $40\sqrt{29}$ cm

(2) 各自で他の場合についても調べてみよう。

- ・数値を一般化して考えてみよう。
- 直角三角形の斜辺の長さ: χ cm
 直角三角形の縦の長さ: a cm
 直角三角形の横の長さ: b cm とする。
 大きい正方形の一辺の長さは $a + b$ より
 一辺が χ cm の長さの正方形の面積は

$$(a + b)^2 - 4 \times \frac{ab}{2} = a^2 + b^2$$

よって、 $\chi^2 = a^2 + b^2$
 これを三平方の定理という。

$$\text{三平方の定理} \quad \chi^2 = a^2 + b^2$$

・三平方の定理を使って確認しよう。

*棒の長さを 2 乗した値を与える。
 *ヒントとして、 a^2 、 b^2 を与える。

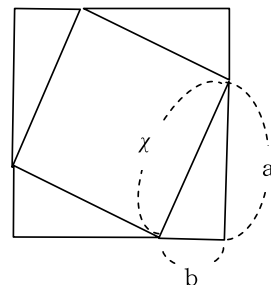
* $\chi^2 = a^2 + b^2$ であることを確認させる。

*同じ戸の高さで測ったグループ同士で棒の長さの値が異なるので、より正確な棒の長さを求めさせる。
 *実際に測った数値を 20 分の一にした直角三角形 4 枚つくらせ、(ア)、(イ) のような正方形状に並べさせる。

(イ) 斜辺の長さを χ cm とする
 小さい正方形の一辺の長さは
 $10 - 4 = 6$
 一辺が χ cm の長さの正方形の面積は

$$6 \times 6 + 4 \times \frac{4 \times 10}{2} = 116$$

χ の長さ: $2\sqrt{29}$ cm
 よって実際の棒の長さは $40\sqrt{29}$ cm



Ⅵ おわりに

各指導内容について、いずれも授業実践することが課題であるが、その他、課題となることをまとめておく。「円」については、児童各自が円を構成する活動、つまり、ロクロを使って丸い皿を作る、板を前後させて粘土を丸くする、鉛筆を削るといった活動はできるのかどうか。「割合」では、割合の知識を有効に使う応用問題を開発すること。「立方体の切断」では、立方体の切断の応用活動をさがすこと。「三平方の定理」では、正方形の窓枠を使った活動の実効性はどうか。また、三平方の定理の応用場面は多くあろうが、平面での三平方の定理の応用活動で、典型的なものを開発すること。以上のようなことが考えられるので、今後さらに探求していきたい。

尚、本稿で示した指導案の作成にあたっては、愛媛大学教育学部数学教育専修平成21年度生の梶本美紀さん、窪田亜希子さん、鈴木翔子さん、広中みのりさんの協力を得ました。末筆ながら、厚くお礼申し上げます。

<引用・参考文献>

藤本義明 2010 「新道具主義の数学教育 ―初期デュエイ哲学に根ざして―」, 第43回数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会, pp.403-408

藤本義明 2012 「新道具主義数学教育における実践的課題」, 愛媛大学教育実践総合センター紀要, 第30号 pp.1-11

