愛媛大学教育学部紀要　第64巻　1～6　2017

えひめサイエンスリーダースキルアッププログラム実践報告

―15 パズルに関連した教材を用いて―

(数学教育講座) 安部利之

Practice Report on the Activity in Ehime Science Leader Skill Up Program

Toshiyuki ABE

(2017 年 10 月 31 日受理)

抄録： 本原稿は、平成 28 年度に行われた「えひめサイエンスリーダースキルアッププログラム」における数学分野での活動の実践報告である。本プログラムでは、高等学校教員の研究指導スキルアップを目的とし、理科分野で先行されていた。平成 28 年度より数学分野として参加した際の活動の内容、考察について報告する。

キーワード： 研究指導 (Research Guidance)、えひめサイエンスリーダースキルアッププログラム (Ehime Science Leader Skill Up Program)、 15-パズル (15-puzzle)

1　はじめに

「えひめサイエンススキルリーダースキルアッププログラム」([1], [2]) にある「リーダー」とは、科学研究指導力を持つ教員を指しており、本プログラムではそのような指導力を持つ教員の発掘および育成を目的としている。本プログラムは、国立研究開発法人科学技術振興機構（JST) の「中高生の科学研究実践活動推進プログラム」の助成を平成 27 年度から 3 年間受けており、愛媛県教育委員会高校教育課と愛媛県総合教育センターが愛媛大学と連携・協働し実行されている。本プログラムの特色は「プロフェッショナルサイエンスコース」と「アドバンスドサイエンスコース」の二つを設定している点である。プロフェッショナルサイエンスコースには研究指導方法の基礎を身につけた教員が所属し指導内容の深化を目指し、アドバンスドサイエンスコースでは、研究指導方法を基礎から学びたい教員が所属し。研究テーマの設定や内容について大学教員から指導を受けながら指導力を身につける。このように二段階に分けて研究指導力を持つ教員育成を目指しており、数学分野としては二年目からの参加であるが, アドバンスドサイエンスコースに所属し、所属教員に対し生徒達も交えて研究指導及び内容指導を行った。

平成 28 年度は, 愛媛県立西条高校と愛媛県立三崎高校からそれぞれ一名ずつ教員が本プログラムに取り組み活動を行った。西条高校, 三崎高校それぞれ 4 名の高校生が各高校の教員と一つのグループを作り、研究テーマを決め研究活動を行った。その研究内容については、平成 28 年 11 月の中間発表および平成 29 年 1 月の「えひめサイエンスチャレンジ」にて最終発表を行い、そのうち三崎高校のグループはアドバンスドサイエンスコースにおけるポスター発表で優秀賞を受賞した。

研究内容については、平成 28 年 7 月に二日間講義形式でセミナーを行い、いくつか研究テーマや問題を提示した後、各高校で協議しテーマを決定した。決定したテーマは偶然にも同じ問題を解決するというものとなり、当初は同じ研究を二校が行うのではないかと危惧したが、各高校の先生のアプローチの違いから、同じ問題を異なる手法で研究し同じ結果を得るという成果が得られた。このことは、同じ問題や課題であっても、指導法によって、異なる過程で研究が行われることが見いだされた点で望ましいものとなった。

本プログラムで高校生に課した課題について簡単に概説する。高校で学ぶ数学では現在、数 I、 II、 III 及び数 A、 B の五冊の教科書に分かれ、それぞれの教科書を通して数学的活動において基本となる知識、概念及びスキルを学ぶ。「えひめサイエンスリーダースキルアッププログラム」の研究課題として数学分野のどの内容を扱うか検討した際、高校で学ぶ内容を補うために教科書の

内容を掘り下げた教材についても考えたが、今回は教科書では直接扱わないが数学的な考え方を用いる題材を使用することとした。その理由として、教科書を用いる題材だと、学年や数学の内容の習熟度に大きく左右されてしまい、複数名でグループを作り一緒に研究するというスタイルにおいて生徒達のスタート地点が異なってしまうことが懸念されたからである。そこで教科書の内容への関連を直接研究するのではなく、裏側で用られるような教材が提供できるのではないかと考え、パズルやゲームに関連した話題から研究課題を選ぶことにした。もちろん教科書で学ぶ内容で有用となるものもあるので、その内容についてはその都度解説したりして、なるべくグループ内の生徒達の習熟度がそろうように配慮した。

ただ、このようなパズルやゲームを通し題材を提供するときに問題点もある。ひとつはパズルやゲームについて解説が必要となる点ともうひとつはそのパズルやゲームの構造について研究の前準備として学ばなければならない点である。前者に関してはなるべくルールのわかりやすいパズルやゲームを取り上げ、その仕組みを体感できるものにすることで克服できると考えた。後者については、少数のセミナーでは克服が難しいので、課題研究と並行して、随時解説を繰り返しすことで習得を促した。

7 月にセミナーを行い、1 月に最終発表を行ったので、実質 7 ヵ月ほどの研究時間しかなく、どちらの生徒も部活動等により時間の制約のある中での活動であったので、今回まとまった形で成果を提出できた点は、実はこのプログラムを開始した時点ではあまり期待していなかったことであった。今回のプログラムを通して、高校生たちの数学的問題への取り組む力や忍耐力に改めて驚きを感じた。もちろん生徒たちを導くために研究方針や方法、成果発表の方法等に多くの時間と考察を費やした先生方の力も大きな助けとなった。

2　15-パズル

まず 15-パズルについて簡単に解説する。15-パズルは、縦に 4 マス、横に 4 マスの計 16 マスを正方形の形に並べ、そこに 1 から 15 までの数字を配置する。このとき一つ残った空白のマスに数字をスライドすることで、 数字を並べ替えるパズルである。この数字を並べた物を**配置**または**パズル**とよぶことにする。

任意の配置からスライドを繰り返して、

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

図 1：最終配置

の形に並び替える．この図 1 のように、右下に空白の来る配置を**基本形**パズルまたは**基本形**配置と呼ぶことにする。しかしよく知られているように、どのパズルもスライドを繰り返して最終配置に並び替えることができるわけではなく、例えば

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

図 2：15-14 パズル

のように並び替えることができないパズルも存在する。配置はスライドの繰り返しで最終配置にできるとき、**可解**であると呼ぶことにする。可解な基本形 15-パズルはすべての基本形配置の個数のちょうど半分の

$$15!/2 = 653,837,184,000$$

個存在する。

可解なパズルの解き方そのものは非常に容易である。基本となるのは 5-パズルと呼ばれる 5 個の数を使ったパズルである。下図 3 は 5-パズルの最終形である。

1	2	3
4	5	

図 3：5-パズルの最終配置

5-パズルの大きな特徴は, 5 個の数のうち, 任意の二つは図 3 の 1 と 4 の場所に並べることができることであり、15-パズルの中に適切に 5-パズルを見つけ出し、数を二個ずつそろえていくことで 3-パズルまで帰着できるのである。そして残った 3-パズルも簡単に最終配置に並べ替えることができる。

セミナーでは、高校生にこの方法を提示した後、15-パズルに潜む数学として順列の基本的内容に関して講習を行った。特に順列の「符号」について紹介し、(1) 配置が順列に対応すること、(2) スライドによって順列の符号が入れ替わること、(3) 基本形パズルをスライドの繰り返しで基本形パズルに並び替えるときに必要となるスライドは偶数回であることの三つの事実を証明した。これらの事実により、順列の符号を計算することによってパズルの可解性が判定できることを解説した。

3　研究課題と各高校の取り組み方

前節で述べた「順列」は、大学の「群論」の授業において学ぶ対称群の基本的内容の一つであるが、高校までの範囲では表立って現れることはない。しかし線対称や点対称などの幾何学的考察や、少し場面を変えると場合の数の計算などに群論的考え方が現れていることがわかる。従って研究課題の方向性の一つとして群論的内容も考えたが、対象が高校一年生ということもあり、新しい知識を多く仮定する群論的内容には向かわず、「試行錯誤を行い推論、実証をする」ということを大事にするために、研究課題の題材を 5-パズルに絞って問題を設定した。

セミナーで紹介し、各校が研究課題として設定した問題は次の問題である。

問題 3.1. 可解な基本形 5-パズルを最終配置までにスライドするときに必要なスライドの手数の最小値（最短手数）が最大となる配置とその最大値を求めよ。

このような問題は「ミニマックス問題」と呼ばれ、決定するのが難しい問題としてしられている。そしてそのような問題に対して、計算機を用いて探索プログラムを作成することで解決するのが常套であり、 実際に最短手数の最大値は 5-パズルで 21 手であることが知られている。同様に 15-パズルでも研究されており、 探索方法に工夫が必要であるが、 [3] において 80 手であることとその配置が提示されている。

このようにすでに結果が知られている問題に取り組む意義は「問題を解決する」という観点においては必要ないと思われるが、アルゴリズムに従って得られた結果に潜む対称性や構造を発見するためにデータやデータの変化を調べることで、詳細を知らない人でも「直感的」にデータの構造が見えるようにするという観点においては大きな意義があると思われる。

二つの高校のグループがこの問題に取り組む際、最短手数の最大値が 21 手であることははっきりとは紹介しなかった。その理由として、上述のように計算機を用いた先行研究の内容は通常の高校生の知識を大幅に超えるものであるし、その研究内容の習得より、データを一から算出し、データの間の関係を生徒自身で探って欲しかったからである。また最終結果を知っているとやはり「結果に実験が誘導される」ことが危惧されるからである。後者については、 実際の研究現場でもよく見かけるが、研究過程において他の研究者と議論をする際に、経験に基づいて推測を立てると、その推測に従うように物事を考えてしまい誤って「理想的な結果」が得られることも多い。特に研究に慣れていない高校の生徒達はその傾向に陥る恐れがあると思われる。例えば、20 手が最短手数の最大値であるとの実験結果が出たときに, 自身の計算やそれから得られる情報の正しさの確認をせず、「21 手が最短手数だ」という最終結論からその結果はおかしいと決めてしまうことになりかねない。このような事態を避けるために、あえて正しい答えについてはぼんやりと結果を紹介するにとどめた。

一方で計算機で最短手数を調べる際の基本方針については解説した。その基本方針とは、最終配置から出発し、一手で移動できる配置をすべて列挙する。その得られた配置から更に一手で移動できる配置を考える。それらの配置達の中には最終配置もあるが、それ以外の配置たちは最終配置から最短で 2 手で移動できる配置たちである。このように最短で n 手必要な配置達の一手先の中に、これまで現れなかった配置があれば、それが最短手数が $n+1$ の配置である。これを繰り返すと, 最短手数が n 手の配置が順次得られるが, 配置は有限個（この場合は $5!/2 = 360$ 個）なのでこの手順はいつかは終わる。その最後に終わった手数が最短手数であり、その時の配置が最短手数が最大となる配置である。この基本方針のもとで問題を具体的にどのように調べるかについては各高校に任せることとした。

その課題に対し、二高校の取り組み方はすべての配置を上記の基本方針に従って列挙する点は同じであったが、その得られた結果の描写の仕方が大きく違っていた。

一方の高校では、最終配置から出発し、最短手数が n 手である配置とその個数を順次注意深く記録していくという手法であった。この方法は報告者が最初に想定したものであり、問題解決にはおそらく最も素朴な方法だと思われる。その方法でのメリットは、最短手数が n 手である配置の隣に $n-1$ 手の配置が列挙しているので、任意の局面から「どのようにたどっていくと最短手数で最終局面にたどり着けるのか」が比較的容易に解析できる点である。しかも n 手までの配置が既にリストアップされているので, 既に現れた配置かどうかの判定もできる。生徒達は、何度も修正しながら 10 月の段階にはリストを完成させ、最短手数が最大となる配置が基本形パズルでないこと、基本形パズルに限定すると最短手数の最大値が 20 手であることとそのような基本形配置を完全に決定していた。そこで次の研究課題として、パズルのゴールとして最終配置ではなく別の配置にしたときにはどのようになるかという課題を出した。その課題についても解決し、1 月に行われた「えひめサイエンスチャレンジ」においてポスター発表を行った。

他方の高校では、最終配置から出発していってその配置から得られる配置を図示するという方法を用いた。この図示による方法は実は最短手数を調べるという意味では前述の方法よりわかりにくい。実際、生徒達が結果を図示する際に最終配置までの手数が 21 手を超える配置がたくさんできてしまっていた。その大きな要因は, 生徒一人ひとりが基本方針を忘れていろいろな方向に手数を伸ばしていたためである。その結果を持ち寄ったとき、ある生徒が 20 手あたりで得られた配置が他の生徒の数手あたりで得られる配置として現れたりと多くの重複があった。そこで 10 月に教員及び生徒たちに途中段階の状況の確認を行った際に、基本方針について再度解説し、問題点を明確にした。ただその機会にいろいろ調べると 12 個の配置がループをなしていることに気付いた。この気付きは今後図示して結果を描写する際に大きな役割を果たすことになる。このループは気付いてしまえば簡単で、5-パズルの左端の二数を固定し右側の 3-パズルの数字のみをスライドで入れ替える操作を考える。そのときスライドによって空白が右側の 3-パズルを一周すると配置がわかるが、更に動かして 3 周すると元の配置に戻ることがわかり、従って左側の二数を固定した 12 個の配置が一つのループをなすことがわかる。このことは図示することで生徒たちが気づいたことであり、前述のデータを並べただけではおそらく気付きにくい構造である。

更にそのループについて詳しく調べると、二つの配置おきに他の一つのループと配置を共有しており、一つのループは計三つのループと共有配置を持つことがわかった。しかも一つのループが左の二数を固定したループであればそのループと共有配置をもつ三つのループは右の二数を固定したループとなることがわかった。右の二数の固定の仕方は 5 個の数から二つ選ぶ順列の個数の ${}_5P_2 = 20$ 通りであり、同様に左の二数を固定する仕方も 20 通りである。よってループは計 40 通り現れる。ループには 12 個の配置があるので延べ $12 \times 40 = 480$ 個の配置があるが、各ループで 6 個の配置が共有されているので $6 \times 40/2 = 120$ 個の配置が重複していることがわかる。従って 360 個の配置をもつ図が得られるが、これはちょうど可解な 5 パズルの個数と一致している。

詳細は省くが図示を行った生徒達はこのループ構造をもとに配置の図示を行い、その図示から最短手数の最大値が 21 であることとその配置を見つけ出した。最後の結果は図示からはそれほど簡単に読み取れる物ではないのだが、ループで見ると最終配置のあるリープから一番遠くにあるループに求める配置があり、図示から最小手数が多いことがある程度読み取れることを示唆している。

このループ構造に関しては報告者の指導学生による卒業研究においてグラフ理論の観点からその構造を解明しようとした。具体的にはループを頂点とし、共有点を持つループを隣接する頂点と考えたとき、得られるグラフは 40 点の 3 次正則二部グラフとなっていることを確認し、その頂点の配置図を作成している ([4])。

4　現在の状況と実践に対する考察

平成 29 年度現在、えひめサイエンスリーダースキルアッププログラムには三崎高校のグループがプロフェッショナルサイエンスコースに所属しており、アドバンスドサイエンスコースには新しく西条高校のグループが加わっている。三崎高校のグループは一名を除き新しい生徒となったため、前年度の継続研究ではあるが新しい観点からの 5-パズルの研究を行っている。西条高校のグループには平成 28 年度のセミナーで講習を行った内容のうち

ゲームに関する内容を改めて講習し、石取りゲームに関する研究を行っている。本報告書作成時にはまだ研究途上であり、詳細については報告できないが、高校生が「自発的に」研究に取り組む課題としてはゲームやパズルを用いた課題はまだまだ研究が必要であると実感している。

今後の高校生を対象とした研究課題設定のための留意点としては、

(1) 数学に対しそれほど自信のない学生にも「興味を引く」課題の設定

(2) 研究を継続するにあたり指導教員が自然に継続課題を見出せるような課題の設定

(3) 生徒自身が「研究を続けたい」と感じることができる課題の設定

(4) 高度な知識を用いた研究成果を適用するだけにならないような課題の設定

が考えられる。高校の教員が生徒達に課題研究を行う際にはこれらのことが達成出来ていると良いのではないかと感じた。ゲームやパズルを用いた課題は (1) に関しては比較的容易にクリアできるのであるが、指導教員が背景にある数学を知らなければ (4) に陥ってしまい、(2) を達成することが難しくなるおそれがある。また数学的背景を指導教員が理解したとしても (2) の達成はその背景を熟知している必要があるためやはり達成は難しい。その意味でゲームやパズルを用いた課題の研究は段階を踏んで、まず背景にある数学に関し習得するために基礎研究を行い、それら継続研究としてゲームやパズルに取り組むのが良いのではないかと感じている。その際、必要があれば更なる数学的背景を研究し、その研究成果をゲームやパズルに反映させる。指導教員はこのような計画のもと、生徒たちに研究を継続させモチベーションを維持しつつ、少しずつ研究や習得知識のレベルを上げて行けるのではないかと考えられる。

今回は一年間で得られた成果として、どちらの高校も非常に頑張って素晴らしい結果を出してくれたのだが、その後のことを考えると、 (3) が満たされないために継続してプログラムに参加する生徒たちが減ったのではないかと考えている。本プログラムは研究指導力を持つ教員育成ということで数か月間で形ある成果を求められているが、数学の場合は、二年ほどで成果が得られ、一年目の成果発表が中間発表になる程度のペースで研究指導を行うのがちょうどよいのではと感じた。

今後の研究課題の運用に関して、実際の現場において、高校教員が生徒一人一人に異なる課題を設定することは非常に困難であることは想像に難くない。一方で継続研究の形で研究を進展させていくのも研究課題によっては可能かも知れないが多くの高校生が行うことを想定すると難しいと思われる。高校生自身が課題を見つけ研究が出来るのが望ましいが、その前段階としての課題研究としては、やはり「結果のわかっている課題」に「結果を知らないことを前提として」取り組むのも一つの方法として有効ではないかと考えている。今回のようにグループによって異なる方針で同様の結果が得られたり、異なる結果が出た場合においても、その「違い」を研究の課題にすることも出来る。

いずれにせよ、教育現場で生徒自身が考えて研究する教育機会が求められている昨今、高校をはじめとする教員の専門的知識を広げる機会は非常に重要となってくると思われる。従って教育学部教員として、少しでも多くの教員に専門的知識を提供できるようこのような機会をきっかけとして微力ながら活動を続けようと考えている。

謝辞

本プログラムへの参加の声かけをして下さいました愛媛大学教育学部理科教育講座の向平和氏及び愛媛県教育委員会高校教育課総合教育センターの谷山伸司氏をはじめ関係の方々に感謝いたします。また本プログラムに参加し、非常に精力的に研究指導を行い、生徒たちへの取り組みの様子や今後の方針等について議論をしていただいた三崎高校の谷脇翔先生、北条高校の砂田佳範先生にも感謝いたします。

参考文献

[1] 平成 27 年度中高生の科学研究実践活動推進プログラム えひめサイエンスリーダースキルアッププログラム 実施報告書, 2016.

[2] 平成 28 年度中高生の科学研究実践活動推進プログラム えひめサイエンスリーダースキルアッププログラム 実施報告書, 2017.

[3] R. Gasser, *Harnessing Computational Resources for Efficient Exhaustive Search*, Seiss Federal Institute of Thechnology Zürich, PhD Thesis, 1995.

[4] 西大輝, 5-パズルに現れるグラフの構造について, 平成 28 年度愛媛大学教育学部卒業論文, 2017.