

# 池田の定理の拡張について

(数学教育講座) 平田浩一

(徳島県立那賀高等学校) 四宮雅士

## An Extension of Ikeda's Theorem

Koichi HIRATA and Masashi SHINOMIYA

(平成 30 年 6 月 21 日受理)

欧文抄録: Ikeda's theorem is a theorem related to the Steiner chain. It was written on the sangaku dedicated by Sadakazu Ikeda to the Chomeiji Temple in Tokyo during the Edo period. In this paper we state an extension of Ikeda's theorem and prove it after preparing some lemmas.

キーワード: 和算 (wasan)、算額 (sangaku)、シュタイナー円鎖 (Steiner chain)、池田の定理 (Ikeda's Theorem)、池田の定理の拡張 (extension of Ikeda's Theorem)

### 1 はじめに

池田の定理は、池田貞一が 1826 年に東都牛島長命寺に掲げた算額に書かれた問題に端を発するもので、同じ年に出版された白石長忠の『社盟算譜』に収録され今日に伝わっている [1]。算額に書かれた問題と解を現代風書き直すと次のようになる。

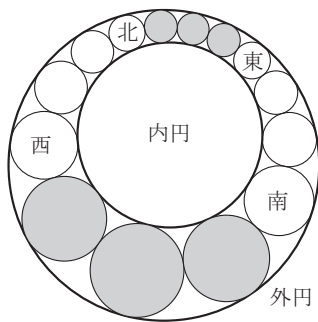


図 1: 池田貞一の算額の図

図 1 のように、外円と内円との間に偶数個の円が環状に接している。このとき 2 組の相対する円の直径を東、西と南、北とすれば、

$$\text{北} = \frac{\text{東} \cdot \text{西}}{(\text{東} + \text{西}) - \frac{\text{東} \cdot \text{西}}{\text{南}}}$$

である。

この式は北円の直径を他の 3 円の直径を使って求める公式となっている。これを少し変形すると

$$\frac{1}{\text{東}} + \frac{1}{\text{西}} = \frac{1}{\text{南}} + \frac{1}{\text{北}}$$

となり、美しい関係式が現れる。これが池田の定理である。

この小論では、第 2 節で池田の定理とその拡張について述べ、第 3 節で証明に必要な反転法について公式等を準備し、第 4 節で池田の定理の拡張を証明する。

### 2 池田の定理とその拡張

池田の定理を述べる前に、シュタイナー円鎖について説明する。

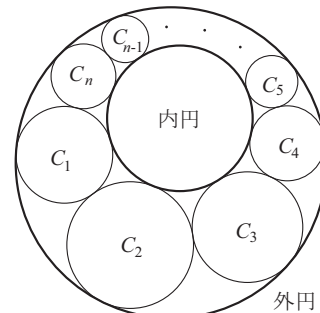


図 2: シュタイナー円鎖

図2のように、外円とその内部の内円が与えられているとする。外円と内円に同時に接する1つの円を $C_1$ とする。次に、外円と内円に接し、かつ $C_1$ に外接する1つ円を $C_2$ とする。続いて、外円と内円に接し、かつ $C_2$ に外接する2つのうち $C_1$ と異なるものを $C_3$ とする。以下同様にこの操作を繰り返して、順に円 $C_1, C_2, \dots, C_n$ をとる。最後に、2円 $C_1$ と $C_n$ がちょうど外接しているとき、このようにして得られた図形を $n$ 個の円のなすシュタイナー円鎖と呼ぶ。

シュタイナー円鎖を用いて、池田の定理を一般的に表すと次のようになる(参考:[2])。

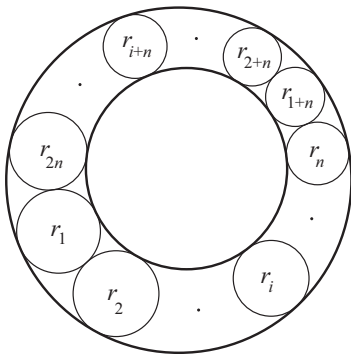


図3: 池田の定理

定理1 (池田の定理)  $n$  を2以上の自然数とする。図3のように、 $2n$  個の円のなすシュタイナー円鎖があり、その半径を $r_1, r_2, \dots, r_{2n}$  とする。このとき、各 $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対して

$$\lambda_i = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+n}}$$

は同じ値をとる。

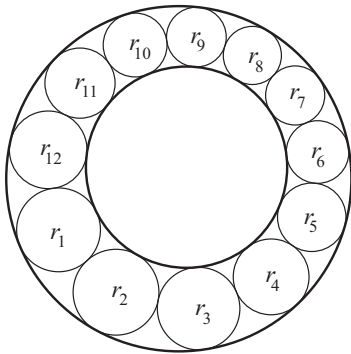


図4: 12個の円のなすシュタイナー円鎖

具体的な例の一つあげてみよう。図4のように12個の円のなすシュタイナー円鎖があるとすると。定理1の意味すると

ころは $n=6$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_7} &= \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_8} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_9} \\ &= \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_{10}} = \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_{11}} = \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_{12}} \end{aligned}$$

である。

そこで、これらの等しい値を組み合わせることで、3個ごとに4個の円をとるとき(図5(a))、関係式

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_7} + \frac{1}{r_{10}} \\ &= \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_8} + \frac{1}{r_{11}} \\ &= \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_9} + \frac{1}{r_{12}} \end{aligned}$$

が得られることは明らかである。同様にして、2個ごとに6個の円をとるとき(図5(b))、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_7} + \frac{1}{r_9} + \frac{1}{r_{11}} \\ &= \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_8} + \frac{1}{r_{10}} + \frac{1}{r_{12}} \end{aligned}$$

となる。

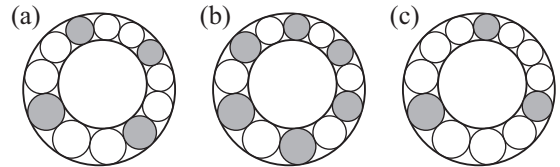


図5: 拡張のアイデア

このアイデアを一般化すると、定理1から次の系2が導かれることは自明である。

系2  $k$  を自然数、 $n$  を2以上の自然数とする。 $2kn$  個の円のなすシュタイナー円鎖があり、その半径を $r_1, r_2, \dots, r_{2kn}$  とする。このとき、各 $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対して

$$\mu_i = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+n}} + \frac{1}{r_{i+2n}} + \dots + \frac{1}{r_{i+(2k-1)n}}$$

は同じ値をとる。

その考えをさらに推し進めると、先ほどの図4に対し、4個ごとに3個の円を取ることで(図5(c))、関係式

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_9} &= \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_{10}} \\ &= \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_7} + \frac{1}{r_{11}} = \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_8} + \frac{1}{r_{12}} \end{aligned}$$

が成り立つのではないかと大胆な予想に行き着く。そこで、実際にいくつかの事例について数値計算してみると、この予想は正しそうである。

このことを一般化すると池田の定理の拡張は次のような定理となる [3]。

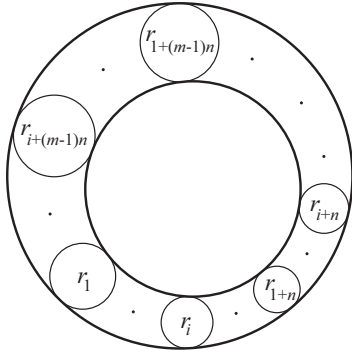


図 6: 池田の定理の拡張

**定理 3 (池田の定理の拡張)**  $m, n$  を 2 以上の自然数とする。図 6 のように  $mn$  個の円が内接するシュタイナー円鎖があり、その半径を  $r_1, r_2, \dots, r_{mn}$  とする。このとき、各  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対して

$$v_i = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+n}} + \frac{1}{r_{i+2n}} + \dots + \frac{1}{r_{i+(m-1)n}}$$

は同じ値をとる。

この定理 3 のうち、 $m$  が偶数の場合は系 2 に含まれてしまう。本質的に新しいのは  $m$  が奇数の場合である。また、定理 3 が証明できれば定理 1 と系 2 はその特別な場合にすぎないことになる。

### 3 反転法

最初に反転を定義する (参考 [2])。

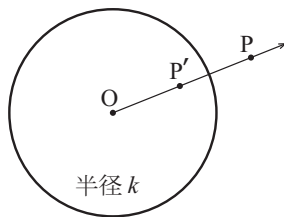


図 7: 反転の定義

**定義 4** 図 7 のように、点  $O$  を中心とする半径  $k$  の円が与えられている。平面上の任意の点  $P$  に対し関係式  $OP \cdot OP' = k^2$  を満たす半直線  $OP$  上の点  $P'$  を対応させる写像  $P \mapsto P'$  を反

転という。このとき、円  $O$  を反転円、点  $O$  を反転中心、 $k$  を反転半径という。

この定義のままでは、反転中心に対する反転像が定義されない。そこで無限遠点  $\infty$  を導入し、反転中心の反転像を無限遠点とし、無限遠点の反転像を反転中心と定める。つまり、平面  $\mathbf{R}^2$  の一点コンパクト化を  $S^2 \simeq \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$  とするとき、反転は全単射  $S^2 \rightarrow S^2$  となる。

反転は次のような性質 (補題 5~補題 7) を持つことが知られている [2]。

**補題 5 (直線と円の反転による像)** 直線と円の反転による像は次のようになる。

- (1) 反転中心を通る直線はその直線自身に移る。
- (2) 反転中心を通らない直線は反転中心を通る円に移る。
- (3) 反転中心を通る円は反転中心を通らない直線に移る。
- (4) 反転中心を通らない円は反転中心を通らない円に移る。

反転を使って円の半径を計算したいときには次の反転公式が有用である。

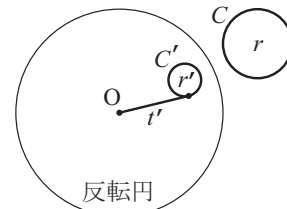


図 8: 反転公式

**補題 6 (反転公式)** 図 8 のように、反転中心を  $O$  反転半径を  $k$  とする反転円で、半径  $r$  の円  $C$  が半径  $r'$  の円  $C'$  に移るとき、反転中心  $O$  から円  $C'$  に引いた接線の長さが  $r'$  であれば、

$$r = \frac{k^2}{r'^2} r'$$

が成り立つ。

反転を使って交わらない 2 円を同心円に移すことができる。これは池田の定理の拡張を証明するのに必要な補題である。

**補題 7 (同心円化)** 同心円でない交わらない 2 円  $C_1, C_2$  があるとき、反転円をうまく選ぶことにより、2 円を同心円  $C'_1, C'_2$  に移すことができる。

図9をもちいて補題7での反転円の具体的な選び方について説明する。交わらない2円 $C_1, C_2$ があるとき、2円の中心を結ぶ直線を $l$ とし、2円の根軸を $m$ とする。 $l, m$ の交点を $S$ 、 $S$ から円 $C_1$ に引いた接線を $ST$ とする。 $l$ 上の点で $SP = ST$ となる点を $P$  ( $P'$ ) とする。点 $P$ または $P'$ を中心とする円(半径は任意)を反転円に選ぶことで2円 $C_1, C_2$ の反転像を同心円にすることができる。

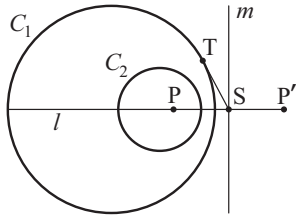


図9: 同心円化

#### 4 反転法による証明

定理3の証明に必要な補題を用意する。また、補題中の $n$ 角形の重心とは、面の内部は重さを持たず、 $n$ 個の頂点のみが均一な重さを持つときの重心である。

**補題8** 正 $n$ 角形 $A_1A_2 \cdots A_n$ がありその重心を $G$ とする。点 $P$ を定点とする。点 $G$ を中心として正 $n$ 角形 $A_1A_2 \cdots A_n$ が回転するとき、

$$PA_1^2 + PA_2^2 + \cdots + PA_n^2$$

は一定である。

(証明) ベクトルを用いて $\overrightarrow{GA_i} = \mathbf{a}_i, \overrightarrow{GP} = \mathbf{p}$ とする。 $G$ は正 $n$ 角形の重心であることにより、

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_1| &= |\mathbf{a}_2| = \cdots = |\mathbf{a}_n| = q \quad (\text{一定}) \\ \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

である。このことを使って計算すると、

$$\begin{aligned} PA_1^2 + PA_2^2 + \cdots + PA_n^2 &= |\mathbf{a}_1 - \mathbf{p}|^2 + |\mathbf{a}_2 - \mathbf{p}|^2 + \cdots + |\mathbf{a}_n - \mathbf{p}|^2 \\ &= |\mathbf{a}_1|^2 + \cdots + |\mathbf{a}_n|^2 - 2\mathbf{p} \cdot (\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_n) + n|\mathbf{p}|^2 \\ &= n(q^2 + |\mathbf{p}|^2) \end{aligned}$$

となり、この値は一定である。

□

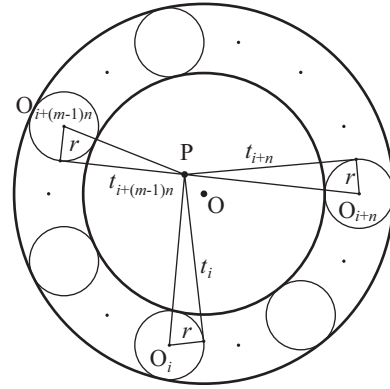


図10: 池田の定理の拡張の証明

(定理3の証明) 図6のように $mn$ 個の円のなすシュタイナー円鎖があるとする。補題7によりこのシュタイナー円鎖の内円と外円を、ある反転円(中心を $P$ 、半径を $k$ とする)で反転させて、外円と内円が点 $O$ を中心とする同心円となるようにすることができる。このとき図6の反転像は、図10のように外円と内円の間に $mn$ 個の同じ半径 $r$ の円が内接するシュタイナー円鎖となる。この $mn$ 個の円の中心を $O_1, O_2, \dots, O_{mn}$ とし、反転中心 $P$ から半径 $r$ の円 $O_i$ へ引いた接線の長さを $t_i$ とする。

補題6の反転公式により

$$r_i = \frac{k^2 r}{t_i^2} = \frac{k^2 r}{PO_i^2 - r^2} \quad (1)$$

なので

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{r_{i+jn}} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{PO_{i+jn}^2 - r^2}{k^2 r} \\ &= \frac{1}{k^2 r} \left\{ \left( \sum_{j=0}^{m-1} PO_{i+jn}^2 \right) - mr^2 \right\} \end{aligned}$$

となる。

ここで、 $m$ 個の円の中心 $O_i, O_{i+n}, O_{i+2n}, \dots, O_{i+(m-1)n}$ は正 $m$ 角形をなし、その重心は点 $O$ であり、 $i$ が $1 \leq i \leq n$ の範囲を動くとき正 $m$ 角形は重心 $O$ の周りを回転することになるので、補題8により

$$\sum_{j=0}^{m-1} PO_{i+jn}^2$$

は $i$ の取り方によらず値が一定である。従って $v_i$ も $i$ の取り方によらず値が一定である。

□

## 5 まとめ

池田の定理について触れた文献はいくつもあるが、いずれも定理 1 について述べたものである。しかし、その定理 1 の直接の帰結である系 2 に触れているものは見当たらない。

筆者たちは系 2 に気がつくことで、池田の定理の拡張としての定理 3 を予想することができた。コンピュータを用いて具体例を計算することでその予想の正しさを確信し、どのようにしたら証明できるかについて時間をかけて検討した。当初は三角関数を使った複雑な計算が必要だろうと考えていたが、証明ができあがってみると、証明に用いる知識としては正  $n$  角形の重心の性質と簡単なベクトル計算だけで十分で

あった。

本研究は JSPS KAKENHI Grant Number JP17K00978 の研究助成を受けて行った研究成果である。

## 参考文献

- [1] 平山諦, 学術を中心とした和算史上の人々, 筑摩書房, 2008。
- [2] 田部井勝稲・松本登志雄, 高校数学で解く日本の図形問題 反転法と算変法, 一粒書房, 2014。
- [3] 大川絢也・四宮雅士, 和算における幾何問題の研究, 愛媛大学教育学部平成 29 年度卒業研究, 2018。

