第 1 章

論理と証明

1.1 命題

真（内容が正しい）であるか偽（内容が誤っている）であるかのどちらか一方に定まるような式や文章を**命題**という．命題を表す記号として，P，Q，R などを用いる．一般に，真の命題は T （True）の値を，偽の命題は F （False）の値をもち，定義より命題のとる値は T または F のどちらかであり，これを命題の**真理値**という．

論理和	$P \vee Q$	P または Q
論理積	$P \wedge Q$	P かつ Q
否定	$\neg P$	P でない
条件命題	$P \longrightarrow Q$	P ならば Q
双条件命題	$P \longleftrightarrow Q$	$(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$

記号 $\vee$，$\wedge$，$\neg$，$\longrightarrow$，$\longleftrightarrow$ を**論理記号**または**論理結合記号**という．論理記号を有限回用いて作られる命題を**複合命題**という．また，命題を変数とし，有限個の論理記号で結ばれた式を**論理式**という．例えば，論理式 $(P \longrightarrow Q) \wedge P$ の P，Q に命題を代入すると，複合命題が得られる．

1.2 真理表

P，Q それぞれの真理値に対応する論理和，論理積，条件命題，否定の真理値は次のようになり，一般に，このような表を**真理表**とよぶ．

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	$P \longrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	$\neg P$
T	F
F	T

1.3 逆・裏・対偶

条件命題 $P \longrightarrow Q$ に対して，**逆**，**裏**，**対偶**をそれぞれ次で定義する．また，下の真理表から，命題 $P \longrightarrow Q$ と対偶命題 $\neg Q \longrightarrow \neg P$ の真理値は一致している．

逆： $Q \longrightarrow P$　　　裏： $\neg P \longrightarrow \neg Q$　　　対偶： $\neg Q \longrightarrow \neg P$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \longrightarrow Q$	$\neg Q \longrightarrow \neg P$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

命題 $P \longrightarrow Q$ が真であるとき，P は Q であるための**十分条件**，Q は P であるための**必要条件**であるという．例えば，命題「$x = 1$ ならば $x^2 = 1$ である」は真であるから，「$x = 1$ である」は「$x^2 = 1$ である」ための十分条件，「$x^2 = 1$ である」は「$x = 1$ である」ための必要条件である．

1.4　含意

論理式 $f(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ が任意の命題 P_1，P_2，$\cdots$，P_n に対して恒に T の値をとるとき，$f(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ は**恒真**または**トートロジー**であるという．また，任意の命題 P_1，P_2，$\cdots$，P_n に対して恒に F の値をとるとき，$f(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ は**恒偽**であるという．論理式 $f(P_1, P_2, \cdots, P_n)$，$g(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ に対して，論理式

$$f(P_1, P_2, \cdots, P_n) \longleftrightarrow g(P_1, P_2, \cdots, P_n) \qquad [f(P_1, P_2, \cdots, P_n) \longrightarrow g(P_1, P_2, \cdots, P_n)]$$

がトートロジーになるとき，$f(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ は $g(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ と**同値**である［$g(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ を**含意**する］といい，

$$f(P_1, P_2, \cdots, P_n) \equiv g(P_1, P_2, \cdots, P_n) \qquad [f(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Longrightarrow g(P_1, P_2, \cdots, P_n)]$$

と表す．次の同値式が成り立つことに注意したい．

累同法則	$P \vee P \equiv P$，$P \wedge P \equiv P$
交換法則	$P \vee Q \equiv Q \vee P$，$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
結合法則	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$，$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
分配法則	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$，$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
二重否定の法則	$\neg(\neg P) \equiv P$
ド・モルガンの法則	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$，$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

1.5　推論

いくつかの命題が真であるという仮定から，他の命題が真であることを主張することを**推論**といい，真であると仮定した命題を**前提**，導かれた命題を**結論**という．命題 P_1，P_2，$\cdots$，P_n，Q に対して，含意

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \Longrightarrow Q$$

が成り立つとき，推論は**妥当な推論**または**正しい推論**であるという．いくつかの推論を重ねることにより，目標とする結論を導く推論を**証明**という．

1.6　述語論理

例えば，「x は 3 より大きい」を $P(x)$ で表すと，$P(x)$ 自身では命題ではないが，$P(5)$ は真であり，$P(2)$ は偽である．この $P(x)$ のように，それ自身では命題ではないが，x の値を定めると命題になるものを**命題関数**という．数学では，$P(x)$ を命題関数とするとき，

「すべての x に対して $P(x)$ である」，　　「ある x に対して $P(x)$ である」

という表現がよく用いられ，それぞれ $\forall x\ P(x)$，$\exists x\ P(x)$ で表す．$\forall x\ P(x)$ を**全称命題**，$\exists x\ P(x)$ を**存在命題**といい，合わせて**限定命題**という．また，$\forall$ を**全称記号**，$\exists$ を**存在記号**といい，合わせて**限定記号**という．限定命題の否定について，

$$\neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x\ \neg P(x), \qquad \neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\ \neg P(x)$$

が成り立つ．

例題 1.1 真理表を用いて，命題 P，Q に対して関係式 $(P \longrightarrow Q) \equiv ((\neg P) \vee Q)$ が成り立つことを示せ．

(解)　真理値を計算すると次のようになる．

P	Q	$\neg P$	$P \longrightarrow Q$	$(\neg P) \vee Q$	$(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

$(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$ がトートロジーであるから，$(P \longrightarrow Q) \equiv ((\neg P) \vee Q)$ が成り立つ．■

例題 1.2 命題 P，Q に対して，次の関係式が成り立つことを示せ

(1) $(\neg(P \longrightarrow Q)) \equiv (P \wedge (\neg Q))$
(2) $(P \longrightarrow Q) \equiv ((\neg Q) \longrightarrow (\neg P))$

(解)　交換法則，二重否定およびド・モルガンの法則より

$$\begin{aligned}(\neg(P \longrightarrow Q)) \equiv&(\neg((\neg P) \vee Q)) \equiv ((\neg(\neg p)) \wedge (\neg Q)) \equiv (P \wedge (\neg Q)),\\ (P \longrightarrow Q) \equiv&((\neg P) \vee Q) \equiv ((\neg P)) \vee (\neg(\neg Q))) \equiv ((\neg(\neg Q)) \vee (\neg P)) \equiv ((\neg Q) \longrightarrow (\neg P))\end{aligned}$$

となる．■

例題 1.3 実数 x，y，z が $x^3+y^3+z^3=0$ かつ $x\,y\,z=0$ をみたすならば，$x+y+z=0$ が成り立つことを示せ．また，実数 x，y，z が $x^3+y^3+z^3=0$ かつ $x+y+z\neq 0$ をみたすならば，$x\,y\,z\neq 0$ が成り立つことを示せ．

(解)　因数分解により

$$\begin{aligned}0=x^3+y^3+z^3-3\,z\,y\,z=&(x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-x\,y-y\,z-z\,x)\\ =&\frac{x+y+z}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\}\end{aligned}$$

が得られることに注意したい．(i) $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\neq 0$ ならば，$x+y+z=0$ である．(ii) $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$ ならば，$x=y=z$ より $0=x\,y\,z=x^3$ となり，$x=y=z=0$ である．つまり，$x+y+z=0$ である．いずれの場合にも $x+y+z=0$ が成り立つ．

また，対偶を取ると，$x+y+z\neq 0$ ならば $x^3+y^3+z^3\neq 0$ または $x\,y\,z\neq 0$ である．$x^3+y^3+z^3=0$ と $x^3+y^3+z^3\neq 0$ は両立しないので，$x^3+y^3+z^3=0$ かつ $x+y+z\neq 0$ ならば，$x\,y\,z\neq 0$ が成り立つ．■

例題 1.4 $P(x)$，$Q(x)$ を同じ変域をもつ命題関数とするとき，次の関係式が成り立つことを示せ．

(1) $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Longrightarrow \forall x\ P(x)$
(2) $(\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x)) \Longrightarrow \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$

(3) $(\exists x\ P(x)) \wedge (\forall x\ Q(x)) \Longrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$

(解)　(1)　$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$ が真ということは，任意の a に対して，$P(a) \wedge Q(a)$ が真であるから，$P(a)$ が真である．つまり，$\forall x\ P(x)$ が真である．したがって，$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Longrightarrow \forall x\ P(x)$ が成り立つ．

(2)　$(\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x))$ が真ということは，(i) $\forall x\ P(x)$ が真，または，(ii) $\forall x\ Q(x)$ が真である．(i)［(ii)］の場合には，任意の a に対して，$P(a)$［$Q(a)$］が真であるから，$P(a) \vee Q(a)$ も真である．つまり，何れの場合にも $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$ が真である．したがって，$(\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x)) \Longrightarrow \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$ が成り立つ．

(3)　$(\exists x\ P(x)) \wedge (\forall x\ Q(x))$ が真ということは，$\exists x\ P(x)$ が真，かつ，$\forall x\ Q(x)$ が真である．$\exists x\ P(x)$ が真であるから，ある a が存在して，$P(a)$ が真である．また，$\forall x\ Q(x)$ が真であるから，$Q(a)$ も真であり，$P(a) \wedge Q(a)$ が真である．つまり，$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$ が真である．したがって，$(\exists x\ P(x)) \wedge (\forall x\ Q(x)) \Longrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$ が成り立つ．■

第 2 章

背理法・数学的帰納法

2.1 背理法の原理

命題 $\neg P \longrightarrow Q \wedge \neg Q$ の真理値を計算すると，次のようになる．

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$Q \wedge \neg Q$	$\neg P \longrightarrow Q \wedge \neg Q$	$P \longleftrightarrow (\neg P \longrightarrow Q \wedge \neg Q)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	T

$Q \wedge \neg Q$ は恒偽を意味しているので，$\neg P$ を前提として矛盾（恒偽）を導くことができれば，つまり，$\neg P \Longrightarrow Q \wedge \neg Q$ が成り立てば，上記の真理表より P と $\neg P \longrightarrow Q \wedge \neg Q$ の真理値は一致するので，P が真であることが分かる．P を直接示すのではなく，$\neg P$ が真であることを仮定して，矛盾を導くことにより，間接的に P が真であることを示す方法を**背理法**という．

2.2 数学的帰納法の原理

例えば「すべての自然数 n に対して，$n\,(n+1)$ は 2 の倍数である」のように，自然数 n を含んだ命題関数 $P(n)$ があり，すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つことを証明しなければならない場合がある．このとき，

(1) $P(1)$ が成り立つ；
(2) $P(k)$ が成り立つと仮定すると，$P(k+1)$ が成り立つ；

ことが示せたとすると，(1) より $P(1)$ が成り立つ．$P(1)$ が成り立つので，(2) より $P(2)$ が成り立つ．さらに，$P(2)$ が成り立つので，(2) より $P(3)$ が成り立つ．同様に，$n = 4$，5，$\cdots$ のときも $P(n)$ が成り立つことになる．つまり，すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つことになる．一般に，「すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つ」を証明するには，上記の (1)，(2) を示せばよいことがわかる．このような証明方法を**数学的帰納法**という．また，

(1) $P(1)$ が成り立つ；
(2) $P(1)$，$P(2)$，$\cdots$，$P(k)$ が成り立つと仮定すると，$P(k+1)$ が成り立つ；

ことが示せた場合にも，「すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つ」ことが証明できていることがわかる．

例題 2.1 $\sqrt{2}$ が無理数であることを示せ．

(解)　$\sqrt{2}$ が無理数でない，つまり，有理数であると仮定する．このとき，互いに素な整数 p，q を用いて，$\sqrt{2}=q/p$ と表すことができ，$q^2=2\,p^2$ である．q は 2 で整除されるので，ある整数 $\hat{q}$ を用いて，$q=2\,\hat{q}$ と表せる．$p^2=2\,\hat{q}^2$ より，p も 2 で整除されるので，2 は p と q の公約数である．これは p と q が互いに素であることに矛盾する．したがって，$\sqrt{2}$ は無理数である．■

例題 2.2 n を自然数とするとき，背理法を用いて，命題「n^2 が 2 で整除されるならば，n も 2 で整除される」が真であることを示せ．

(解)　$(\neg(P \longrightarrow Q)) \equiv (P \wedge (\neg Q))$ であることに注意したい．示すべき命題の否定「n^2 は 2 で整除され，かつ，n は 2 で整除されない」を仮定する．このとき，ある自然数 k が存在して $n=2\,k+1$ と表され，

$$n^2=(2\,k+1)^2=2\,(2\,k^2+2\,k)+1$$

となり，n^2 は 2 で整除されない．これは n^2 が 2 で整除されることに矛盾する．したがって，命題「n^2 が 2 で整除されるならば，n も 2 で整除される」は真である．■

例題 2.3 数学的帰納法を用いて，すべての自然数 n に対して 5^n-1 は 4 の倍数であることを証明せよ．

(解)　等比数列の和の公式より

$$1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}=\frac{1-5^n}{1-5}$$

となり，すべての自然数 n に対して 5^n-1 は 4 の倍数であることが示せるが，数学的帰納法を用いた証明を示す．

(1) $n=1$ のとき，$5^1-1=4$ より，5^1-1 は 4 の倍数である．

(2) $n=k$ のとき，5^k-1 が 4 の倍数と仮定する．このとき，自然数 ℓ を用いて，$5^k-1=4\,\ell$ と表すことができる．

$$5^{k+1}-1=5\cdot 5^k-1=5\;(4\,\ell+1)-1=4\;(5\,\ell+1)$$

より，$5^{k+1}-1$ も 4 の倍数である．

数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して 5^n-1 は 4 の倍数である．■

例題 2.4 a，b を 0 でない実数とするとき，数学的帰納法を用いて，すべての自然数 n に対して次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$(a+b)^n=\sum_{\ell=0}^{n} {}_nC_\ell\, a^\ell\, b^{n-\ell}$$

ここで，$n!=n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ であり，${}_nC_k=\dfrac{n!}{k!\;(n-k)!}$ である．一般に，上の関係式を**二項定理**，一般項 $a^\ell\, b^{n-\ell}$ の係数 ${}_nC_\ell$ を**二項係数**という．

(解)　示さなければならない等式を (E) とする．

(1) $n=1$ のとき，

$$(\text{左辺})=(a+b)^1=a+b, \qquad (\text{右辺})={}_1C_0\, a^0\, b^{1-0}+{}_1C_1\, a^1\, b^{1-1}=a+b$$

より (E) が成り立つ．

(2) $n=k$ のとき (E) が成り立つこと，つまり，

$$(a+b)^k=\sum_{\ell=0}^{k} {}_kC_\ell\, a^\ell\, b^{k-\ell}$$

を仮定する．両辺に $(a+b)$ を掛け，変換 $j=\ell+1$ より

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)\ (a+b)^k = (a+b)\sum_{\ell=0}^{k} {}_kC_\ell\, a^\ell\, b^{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{k} {}_kC_\ell\, a^{\ell+1}\, b^{k-\ell} + \sum_{\ell=0}^{k} {}_kC_\ell\, a^\ell\, b^{k+1-\ell} \\ &= {}_kC_0\, a^0\, b^{k+1-0} + \sum_{\ell=0}^{k-1} {}_kC_\ell\, a^{\ell+1}\, b^{k-\ell} + \sum_{\ell=1}^{k} {}_kC_\ell\, a^\ell\, b^{k+1-\ell} + {}_kC_k\, a^{k+1}\, b^{k-k} \\ &= b^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} {}_kC_{j-1}\, a^j\, b^{k+1-j} + \sum_{\ell=1}^{k} {}_kC_\ell\, a^\ell\, b^{k+1-\ell} + a^{k+1} \\ &= b^{k+1} + \sum_{\ell=1}^{k} \left({}_kC_{\ell-1} + {}_kC_\ell\right)\, a^\ell\, b^{k+1-\ell} + a^{k+1}\end{aligned}$$

となる．$(\ell+1)!=(\ell+1)\ \ell!$ より，$0\le\ell<k$ のとき

$$\begin{aligned}{}_kC_{\ell-1} + {}_kC_\ell &= \frac{k!}{(\ell-1)!\ (k+1-\ell)!} + \frac{k!}{\ell!\ (k-\ell)!} \\ &= \frac{k!\,\ell}{\ell!\ (k+1-\ell)!} + \frac{k!\ (k+1-\ell)}{\ell!\ (k+1-\ell)!} = \frac{k!\ (k+1)}{\ell!\ (k+1-\ell)!} = {}_{k+1}C_\ell\end{aligned}$$

である．${}_{k+1}C_0=1$，${}_{k+1}C_{k+1}=1$ より，

$$(a+b)^{k+1} = {}_{k+1}C_0\, a^0\, b^{k+1-0} + \sum_{\ell=1}^{k} {}_{k+1}C_\ell\, a^\ell\, b^{k+1-\ell} + {}_{k+1}C_{k+1}\, a^{k+1}\, b^0 = \sum_{\ell=0}^{k+1} {}_{k+1}C_\ell\, a^\ell\, b^{k+1-\ell}$$

となり，$n=k+1$ のときも (E) が成り立つ．

数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して (E) が成り立つ．■

例題 2.5 数学的帰納法を用いて，すべての自然数 n に対して，不等式 $2^n\le 2\,n!$ が成り立つことを証明せよ．

(解)　示さなければならない不等式を (E) とする．

(1) $n=1$ のとき，(左辺) $=2^1=2$，(右辺) $=2\cdot 1!=2$ より，(E) が成り立つ．

(2) $n=k$ のとき (E) が成り立つこと，つまり，$2^k\le 2\,k!$ を仮定する．k が自然数であることから $k+1\ge 2$ となることに注意したい．

$$2^{k+1} = 2\cdot 2^k \le (k+1)\ (2\,k!) = 2\ (k+1)!$$

より，$n=k+1$ のときも (E) が成り立つ．

数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して (E) が成り立つ．■

例題 2.6 a，b を整数とし，2 次方程式 $x^2+a\,x+b=0$ の解を α，β とする．数学的帰納法を用いて，すべての自然数 n に対して $\alpha^n+\beta^n$ は整数であることを示せ．

(解)　解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-a$，$\alpha\,\beta=b$ であることに注意したい．

(1) $\alpha^1+\beta^1=\alpha+\beta=-a$ より，$\alpha^1+\beta^1$ は整数である．また，

$$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\,\alpha\,\beta = a^2-2\,b$$

より，$\alpha^2+\beta^2$ も整数である．

(2) $k \geq 2$ とし，$\alpha^1 + \beta^1$，$\alpha^2 + \beta^2$，$\cdots$，$\alpha^k + \beta^k$ が整数であると仮定する．

$$\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} = (\alpha + \beta)\left(\alpha^k + \beta^k\right) - \alpha\beta\left(\alpha^{k-1} + \beta^{k-1}\right) = -a\left(\alpha^k + \beta^k\right) - b\left(\alpha^{k-1} + \beta^{k-1}\right)$$

となり，$\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$ も整数である．

数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $\alpha^n + \beta^n$ は整数である．■

第 3 章

集合と写像

3.1　集合

範囲が明確であり，一つ一つのものの同異が区別できるような対象の集まりを**集合**といい，集合を構成する一つ一つの対象を集合の**要素**または**元**という．また，x が集合 A の要素であるときには，x は A に属するといい，$x \in A$ と表す．A の要素ではないときには $x \notin A$ と表す．

よく用いられる数の集合として，自然数全体の集まり $\mathbb{N}$，整数全体の集まり $\mathbb{Z}$，有理数全体の集まり $\mathbb{Q}$，実数全体の集まり $\mathbb{R}$，複素数全体の集まり $\mathbb{C}$ がある．

■集合の表記法　例えば，集合 A を 5 以下の自然数の集まりとする．要素を書き並べて，$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ と表すことができる．このような集合の表記法を**外延的記法**という．また，集合に属するための条件を書き並べて，$A = \{\, x \mid x \in \mathbb{N} \land x \leq 5 \,\}$ と表すことができる．このような表記法を**内包的記法**という．

実数 a，b に対して

$$[a, b] = \{\, x \mid x \in \mathbb{R} \land a \leq x \leq b \,\}, \qquad (a, b) = \{\, x \mid x \in \mathbb{R} \land a < x < b \,\}$$

をそれぞれ a，b を端点にもつ**閉区間**，**開区間**という．また，

$$(a, b] = \{\, x \mid x \in \mathbb{R} \land a < x \leq b \,\}, \qquad [a, b) = \{\, x \mid x \in \mathbb{R} \land a \leq x < b \,\}$$

を**半開区間**という．さらに，

$$\begin{aligned} (-\infty, b] &= \{\, x \mid x \in \mathbb{R} \land x \leq b \,\}, \qquad & [a, +\infty) &= \{\, x \mid x \in \mathbb{R} \land a \leq x \,\} \\ (-\infty, b) &= \{\, x \mid x \in \mathbb{R} \land x < b \,\}, \qquad & (a, +\infty) &= \{\, x \mid x \in \mathbb{R} \land a < x \,\} \end{aligned}$$

も定義され，これらを総称して**区間**という．したがって，$\mathbb{R}$ も区間の一つと考える．

■包含関係　集合 A，B に対して，命題

$$\forall x \ \ (x \in B \quad \Longrightarrow \quad x \in A)$$

が成り立つとき，A は B を**含む**または B は A の**部分集合**であるといい，$B \subset A$ と表す．含む，含まれるという関係を**包含関係**という．また，$B \subset A$ かつ $A \subset B$ がみたされるとき，A と B は**等しい**といい，$A = B$ と書く．さらに，$B \subset A$ かつ $A \neq B$ のとき，B は A の**真部分集合**といい，$B \subsetneq A$ と表す．

■空集合　要素をもたない集合を**空集合**といい，$\varnothing$ と書く．空集合は任意の集合の部分集合である．集合 A，B が $A \cap B = \varnothing$ をみたすとき，A と B は**交わらない**または**互いに素**という．

■集合の演算　集合 A，B に対して，A と B の**和集合** $A \cup B$，**差集合** $A \setminus B$，**共通集合（積集合）** $A \cap B$ をそれぞれ

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\}, \qquad A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \vee x \notin B \,\}, \qquad A \cap B = \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\}$$

により定義する．

一つの集合 X を固定して，その部分集合について論じることが多い．このような X を**普遍集合**または**全集合**という．$A \subset X$ に対して，X に含まれるが，A に含まれない要素の集まりを A の**補集合**といい，A^c と表す．このとき，$A^c = X \setminus A$ であることに注意したい．

集合 A，B，C に対して，次が成り立つ．

交換法則	$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$
結合法則	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
分配法則	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
ド・モルガンの法則	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

■ベキ集合　集合 A の部分集合全体の集まりを A の**ベキ集合**といい，$\mathcal{P}(A)$ または 2^A と表す．

■直積　空でない集合 A，B に対して，A の要素 a と B の要素 b の順序対 (a, b) 全体の集合を $A \times B$ と表し，A と B の**直積**という．例えば，$\mathbb{R}$ とそれ自身の直積 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$，$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ はそれぞれ $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ と表されることが多い．

3.2　写像

集合 X，Y が与えられているとする．各要素 $x \in X$ に対して，唯一つの要素 $y \in Y$ を対応させる規則 f を X から Y への**写像**といい，$f : X \to Y$ と書く．このとき，$x \in X$ に対応する $y \in Y$ を $y = f(x)$ と表し，f による x の**像**という．また，X を f の**定義域**，Y を f の**値域**という．特に，値域が例えば $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ などの数の集合であるような写像は**関数**ということがある．

写像 $f : X \to Y$ と $g : W \to Z$ が与えられているとする．$X = W$，$Y = Z$ であり，任意の $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つとき，f と g は**等しい**といい，$f = g$ と表す．

■像と逆像　写像 $f : X \to Y$ が与えられているとき，$A \subset X$，$B \subset Y$ に対して

$$f(A) = \{\, f(x) \mid x \in A \,\}, \qquad f^{-1}(B) = \{\, x \mid x \in X \wedge f(x) \in B \,\}$$

をそれぞれ f による A の**像**，B の**逆像**という．写像 $f : X \to Y$，X の部分集合 A_1，A_2，Y の部分集合 B_1，B_2 に対して，次が成り立つ．

(1)　$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(2)　$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

(3)　$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(4)　$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

上記 (2) において，等号が成り立たない例として，$f(x) = x^2$，$A_1 = [-2, 1]$，$A_2 = [-1, 2]$ がある．

■単射・全射　$f : X \to Y$ を写像とする．命題

$$\forall x_1, x_2 \in X \;\; (x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2))$$

が成り立つとき，f は**単射**であるという．対偶をとることにより，上の命題は

$$\forall x_1, x_2 \in X \;\; (f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2)$$

と同値であるから，f が単射であるかどうかを確認するためにはどちらを用いてもよい．また，$f(X)=Y$ が成り立つとき，f は**全射**であるという．さらに，f が単射かつ全射であるとき，f は**全単射**であるという．全単射で最も単純なものは，X の各要素をそれ自身に写す写像であり，それを**恒等写像**といい，id_X と表す．

■合成写像　$f:X\to Y$ と $g:Y\to Z$ が与えられているとする．このとき，X の要素 x に対して，f による像 $y=f(x)\in Y$ は定まり，この y に対して，g による像 $z=g(y)=g(f(x))\in Z$ が定まるので，各要素 $x\in X$ に対して要素 $z=g(f(x))\in Z$ を対応させる写像が得られる．この写像を f と g の**合成**といい，$g\circ f$ で表す．

■逆写像　写像 $f:X\to Y$ に対して，

$$g\circ f=id_X,\qquad f\circ g=id_Y$$

をみたす写像 $g:Y\to X$ が存在するとき，g を f の**逆写像**といい，$g=f^{-1}$ と表す．

■グラフ　写像 $f:X\to Y$ に対して，直積 $X\times Y$ の部分集合

$$G(f)=\{\,(x,f(x))\mid x\in X\,\}$$

を f の**グラフ**という．写像 $f:X\to Y$ と $g:X\to Y$ に対して，$f=g$ であるための必要十分条件は $G(f)=G(g)$ であることに注意したい．

例題 3.1 集合 A，B に対して $A\subset A\cup B$，$A\cap B\subset A$ であることを示せ．

(解)　任意の x に対して

$$x\in A \qquad\Longrightarrow\qquad x\in A\vee x\in B \qquad\Longleftrightarrow\qquad x\in A\cup B$$

が成り立つので，$A\subset A\cup B$ である．また，任意の x に対して

$$x\in A\cap B \qquad\Longleftrightarrow\qquad x\in A\wedge x\in B \qquad\Longrightarrow\qquad x\in A$$

が成り立つので，$A\cap B\subset A$ である．■

例題 3.2 A，B を集合とする．

(1) $A\cup B=B$ であるための必要十分条件は $A\subset B$ である．
(2) $A\cap B=A$ であるための必要十分条件は $A\subset B$ である．

(解)　(1)　($\Longrightarrow$)　例題 3.1 より $A\subset A\cup B=B$ である．
($\Longleftarrow$)　例題 3.1 より $B\subset A\cup B$ である．任意に $x\in A\cup B$ をとる．このとき，(i) $x\in A$ または (ii) $x\in B$ である．(i) のときには $A\subset B$ より $x\in B$ である．何れの場合にも $x\in B$ であるから，$A\cup B\subset B$ である．したがって，$A\cup B=B$ である．
(2) ($\Longrightarrow$)　例題 3.1 より $A=A\cap B\subset B$ である．
($\Longleftarrow$)　例題 3.1 より $A\cap B\subset A$ である．任意に $x\in A$ をとると，$A\subset B$ より $x\in B$ も同時に成り立つので，$x\in A\cap B$ となり，$A\subset A\cap B$ である．したがって，$A\cap B=A$ である．■

例題 3.3 写像 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$ に対して，次が成り立つことを示せ．

(1) $g\circ f$ が単射ならば，f は単射である．
(2) $g\circ f$ が全射ならば，g は全射である．

(解)　(1)　任意の x_1，$x_2\in X$ が $f(x_1)=f(x_2)$ をみたすと仮定する．

$$(g\circ f)(x_1)=g(f(x_1))=g(f(x_2))=(g\circ f)(x_2)$$

であり，$g \circ f$ が単射であることから，$x_1 = x_2$ となる．したがって，f は単射である．
(2)　任意に $z \in Z$ をとる．$g \circ f$ が全射であるから，ある $x \in X$ が存在して，$z = (g \circ f)(x)$ が成り立つ．ここで，$y = f(x)$ とおくと，$y \in Y$ であり，$z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$ が成り立つ．したがって，g は全射である．■

例題 3.4 写像 $f : X \to Y$ と集合 $A \subset X$，$B \subset Y$ に対して $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$ が成り立つことを示せ．

(解)　任意に $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$ をとる．このとき，ある $x \in A \cap f^{-1}(B)$ が存在して，$y = f(x)$ となる．$x \in A$ と $x \in f^{-1}(B)$ が同時にみたされることに注意したい．$x \in A$ より $y \in f(A)$ である．また，$x \in f^{-1}(B)$ より $y = f(x) \in B$ となる．したがって，$y \in f(A) \cap B$ となり，$f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$ である．逆に，任意に $y \in f(A) \cap B$ をとる．$y \in f(A)$ より，ある $x \in A$ が存在して，$y = f(x)$ が成り立つ．また，$y \in B$ より $x \in f^{-1}(B)$ である．$x \in A \cap f^{-1}(B)$ であるから，$y \in f(A \cap f^{-1}(B))$ となる．したがって，$f(A) \cap B \subset f(A \cap f^{-1}(B))$ である．以上から，$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$ が成り立つ．■

第 4 章

集合族

4.1　集合族とは

$X = \mathbb{R}$ とする．正数 t に対して $A_t = (0, t)$ とすると，$\{ A_t \mid t > 0 \}$ は X の無限個の部分集合からなる集合である．このように，定義域（**添数集合**）が集合 Λ で，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して X の部分集合が対応するとき，つまり，写像 $\phi : \Lambda \to \mathcal{P}(X)$ が存在するとき，$\{ \phi(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \}$ を Λ によって添数づけられた**集合族**という．値となる部分集合が $\phi(\lambda) = A_\lambda$ である場合には，対応する集合族 $\{ A_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ と表すことが多い．また，添数集合 Λ を自然数の集合 $\mathbb{N}$ またはその部分集合に限定した集合族を**集合列**という．

例 4.1 $\mathbb{N}$ の各要素 n に対して $\mathbb{N}(n) = \{ 1, 2, \cdots, n \}$ とおくと，$\mathbb{N}$ を添字の集合とする $\mathbb{N}$ の部分集合族 $\{ \mathbb{N}(n) \}_{n\in\mathbb{N}}$ が得られる．

例 4.2 $f : X \to Y$ を全射とする．このとき，各 $y \in Y$ に対して逆像 $f^{-1}(\{ y \})$ が定義でき，Y を添字の集合とする X の部分集合族 $\left\{ f^{-1}(\{ y \}) \right\}_{y\in Y}$ が得られる．

4.2　集合族の演算・直積

集合族 $\{ A_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき，$\{ A_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ の**和集合** $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ および**積集合** $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ を

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{ x \mid \exists\lambda \in \Lambda\ (x \in A_\lambda) \}, \qquad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{ x \mid \forall\lambda \in \Lambda\ (x \in A_\lambda) \}$$

により定義する．特に，$\Lambda = \mathbb{N}$ や $\Lambda = \{ 1, 2, \cdots, n \}$ のときには

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \qquad \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

のように表すことがある．

注意 4.3 $\Lambda = \varnothing$ のときには，次の性質が成り立つ．

(1) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \varnothing$

(2) $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = X$

（証明） (1)　$x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}$ ということは，x がどれかの A_λ に属するが，その A_λ が全くないので，どんな x も $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ に属することはない．したがって，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \varnothing$ である．

(2)　X の任意の要素 x をとる．x が $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ に属しているかどうか調べるには，x がすべての A_λ に属している

かどうかを確認しなければならない．しかし，その確認すべき A_λ が全くないので，x は $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ の要素であると考えるべきである．したがって，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = X$ である． ■

定理 4.4 (集合族の演算公式) 集合族 $\{ A_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ と集合 B について，次の関係式が成り立つ．

(1) **結合法則**　$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B)$，$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap B = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B)$.

(2) **分配法則**　$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B)$，$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup B = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B)$.

(3) **ド・モルガンの法則**　$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$，$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$.

注意 4.5 前述の結合法則，分配法則，ド・モルガンの法則は有限個の場合であるが，上の定理は無限個の場合にも成り立つことを示している．

定理 4.6 (集合族の像と逆像に関する公式) f を X から Y への写像とし，$\{ A_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合の族，$\{ B_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ を Y の部分集合の族とするとき，次の関係式が成り立つ．

(1) $f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$

(2) $f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$

(3) $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$

(4) $f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$.

注意 4.7 前述の像と逆像に関する性質は有限個の場合であるが，上の定理は無限個の場合にも成り立つことを示している．

空でない集合 X，Y に対して，X の要素 x と Y の要素 y の順序対 (x, y) 全体の集合を X と Y の**直積**といい，$X \times Y$ と表す．つまり，

$$X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y \}$$

である．また，$X \times Y$ の 2 つの要素 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) に対して，$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ を $x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ で定める．さらに，$A \subset X$，$B \subset Y$ とするとき，$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \}$ と定義すると，$A \times B$ は $X \times Y$ の部分集合になる．A，B の少なくとも一方が空集合のとき，$A \times B$ は

$$\varnothing \times B = A \times \varnothing = \varnothing \times \varnothing = \varnothing$$

のように定義される．

n 個の集合 X_1，X_2，$\cdots$，X_n の直積は

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in X_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n \}$$

で定義される．$X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ のとき $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ を X^n で表す．一般に，$\{ X_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ を任意の集合族とする．このとき，各 X_λ から 1 つの要素 x_λ をとり，それらの組 $(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ の全体の集合を

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \{ (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \mid \forall\lambda \in \Lambda \ (x_\lambda \in X_\lambda) \}$$

であらわし，$\{ X_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直積**という．特に，$\Lambda = \mathbb{R}$ で，$X_\lambda = \mathbb{R}$　$(\lambda \in \Lambda)$ とするとき，直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数 $f(\lambda)$ の全体と同一視できる．

例 4.8 $A_n = (-1/n, 1/n)$　$(n \in \mathbb{N})$ すると

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (-1, 1), \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{ 0 \}$$

である．

(解)　$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ であるから $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ である．$0 \in A_n$　$(n \in \mathbb{N})$ であるから，$0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ てある．また，$x \neq 0$ とすると，$|\,x\,| > 1/n$ となる $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \notin A_n$ であるから，$x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ である．したがって，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\,0\,\}$ である．■

例題 4.9 集合族 $\{\,A_\lambda\,\}_{\lambda\in\Lambda}$ と集合 B について，分配法則 $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B)$ が成り立つことを示せ．

(証明)　任意の x に対して

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap B \quad &\iff \quad x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \wedge x \in B \quad \iff \quad (\exists\lambda \in \Lambda\ \ (x \in A_\lambda)) \wedge x \in B \\
&\iff \quad \exists\lambda \in \Lambda\ \ (x \in A_\lambda \wedge x \in B) \quad \iff \quad \exists\lambda \in \Lambda\ \ (x \in A_\lambda \cap B) \\
&\iff \quad x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B)
\end{aligned}$$

となるので，$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B)$ が成り立つ．■

例題 4.10 定理 4.6 における関係式 (1) が成り立つことを示せ．

(解)　すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して，$A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ より $f(A_\lambda) \subset f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$ であるから，

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) \subset f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$$

が成り立つ．任意に $y \in f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$ をとる．ある $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が存在して $y = f(x)$ がみたされる．$x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ より，ある $\lambda \in \Lambda$ がとれ $x \in A_\lambda$ であるから，$y = f(x) \in f\left(A_\lambda\right) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f\left(A_\lambda\right)$ である．したがって，$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f\left(A_\lambda\right)$ が成り立つ．■

例 4.11 A，C の X の部分集合とし，B，D を Y の部分集合とする．このとき，

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

が成り正つ．

(解)　任意の (x, y) に対して

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \quad &\iff \quad ((x, y) \in A \times B) \wedge ((x, y) \in C \times D) \\
&\iff \quad (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D) \\
&\iff \quad (x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D) \\
&\iff \quad (x \in A \cap C) \wedge (y \in B \cap D) \\
&\iff \quad (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)
\end{aligned}$$

が成り立つので，$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ である．■

例題 4.12 集合列 $\{\,A_n\,\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right), \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$$

とするとき，$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$ を示せ．

(解)　$B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$，$C_n = \bigcap_{k \geq n} A_k$ により集合列 $\{ B_n \}_{n \in \mathbb{N}}$，$\{ C_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ を定義すると，各 n に対して $C_n \subset C_{n+1} \subset B_{n+1} \subset B_n$ が成り立つので，すべての自然数 n，k に対して $C_k \subset B_n$ である．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k \subset B_n$$

であるから，

$$\liminf_{n \to \infty} A_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \limsup_{n \to \infty} A_n$$

となる．■

第 5 章

同値関係・順序関係

5.1 関係

例えば，2 つの三角形が与えられたときには，合同であるかどうかを調べることができる．また，2 つの実数 x，y が与えられたとき，x と y には大きさの大小が決まっている．このように，集合 X の要素 x，y からなるすべての順序対 (x, y) に対して，ある種の関係 ρ が成り立つかどうかが明確に定められているとき，この関係 ρ を**二項関係**という．(x, y) に対して，この関係が成り立つとき $x\rho y$ と表し，成立していないときには $x\not\rho y$ と表す．

5.2 同値関係

集合 X の上に，二項関係 ρ が定義されていて，条件

(R1) **反射法則**　$x\rho x$
(R2) **対称法則**　$x\rho y \implies y\rho x$
(R3) **推移法則**　$x\rho y \ \wedge\ y\rho z \implies x\rho z$

をみたすとき，この関係 ρ を**同値関係**という．関係 ρ が同値関係であるとき，ρ を $\sim$ で表すことが多い．このとき，$x\rho y$ は $x \sim y$ で，$x\not\rho y$ は $x \not\sim y$ で表される．$x \sim y$ のとき，x と y は**同値**であるという．同値関係 ρ は，実数や集合の相等を一般化したものである．

集合 X に同値関係 $\sim$ が定義されているとする．このとき，要素 $a \in X$ と同値な要素 x 全体を a の**同値類**といい，$C(a)$ と表すことにする．このとき，

$$C(a) = \{\, x \in X \mid x \sim a \,\}$$

であり，a を同値類 $C(a)$ の**代表元**という．

定理 5.1 次のことが成り立つ．

(1) $a \in C(a)$.
(2) $a \sim b \iff C(a) = C(b)$.
(3) $a \not\sim b \iff C(a) \cap C(b) = \varnothing$.

(証明) (1)　$a \sim a$ より $a \in C(a)$ である．

(2)　$a \sim b$ とする．任意の $x \in C(a)$ $[x \in C(b)]$ に対して，$x \sim a$ $[x \sim b]$ より $x \sim b$ $[x \sim a]$ となり，$x \in C(b)$ $[x \in C(a)]$ が得られる．したがって，$C(a) = C(b)$ である．逆に，$C(a) = C(b)$ なら，(1) より $a \in C(b)$ であるから，$a \sim b$ が成り立つ．

(3)　$a \not\sim b$ かつ $C(a) \cap C(b) \neq \varnothing$ を仮定する．$x \in C(a) \cap C(b)$ をとると，$x \sim a$ かつ $x \sim b$ であるから，$a \sim b$ が

成り立ち，これは $a \not\sim b$ に矛盾する．したがって，$a \not\sim b$ ならば $C(a) \cap C(b) = \varnothing$ が成り立つ．また，(1)，(2) より，$a \sim b$ ならば，$a \in C(a)$ より $C(a) \cap C(b) = C(a) \neq \varnothing$ である．対偶をとると，$C(a) \cap C(b) = \varnothing$ ならば $a \not\sim b$ である． ■

集合 X 上に同値関係 $\sim$ が定義されているとき，同値類の集合 $\mathcal{M} = \{\, C(a) \mid a \in X \,\}$ によって X は分類でき，$\mathcal{M}$ を X の同値関係 $\sim$ での**商集合**といい，$X/\!\sim$ と表す．また，$a \in X$ に対して $C(a) \in X/\!\sim$ を対応させる写像 $\varphi : X \to X/\!\sim$ を**標準写像**という．さらに，$\varphi \circ \psi = id_{X/\sim}$ が成り立つ写像 $\psi : X/\!\sim \to X$ が存在するとき，$\{\, \psi(C(a)) \mid C(a) \in X/\!\sim \}$ を同値関係 $\sim$ における**代表系**という．

5.3 順序関係

空でない集合 X の要素間に，条件

(O1) **反射法則**　$x\rho x$
(O2) **反対称法則**　$x\rho y \ \wedge\ y\rho x \quad \Longrightarrow \quad x = y$
(O3) **推移法則**　$x\rho y \ \wedge\ y\rho z \quad \Longrightarrow \quad x\rho z$

をみたす二項関係 ρ が定義されているとき，集合 X は**順序集合**または**半順序集合**という．順序集合は，集合 X とその上の順序関係 ρ を明示して，(X, ρ) と書くこともある．順序関係 ρ は，実数の大小関係や集合の包含関係を一般化したものである．

例 5.2 $\mathbb{N}$ の部分集合 A，B に対して，$A \subset B$ が成り立つとき $A \preceq B$ と定めると，二項関係 $\preceq$ は $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ における順序関係である．$A = \{\,1,3\,\}$，$B = \{\,1,2,3\,\}$，$C = \{\,1,2\,\}$ とおくと，集合 A，B，C は $\mathbb{N}$ の部分集合である．$A \preceq B$，$C \preceq B$ であるが，A と C の間には順序関係 $\preceq$ で順序を付けることができない．

順序集合 (X, ρ) の要素 x，y が $x\rho y$ または $y\rho x$ の関係にあるとき，x と y は**比較可能**であるという．上記のように，順序をつけることができない（比較可能でない）x，$y \in X$ が存在することがある．特に，順序集合 X において，X の任意の要素 x，y が比較可能であるとき，つまり，$x\rho y$ かつ $y\rho x$ が成り立つとき，X を**全順序集合**または**線形順序集合**であるという．

順序集合 (X, ρ) の部分集合を A とする．すべての $x \in A$ に対して $x\rho a$ ［$a\rho x$］をみたす要素 $a \in A$ が存在するとき，a を A の**最大元**［**最小元**］といい，$a = \max A$ ［$a = \min A$］と表す．a，b の最大元［最小元］とすると，最大元［最小元］の定義より $a\rho b$，$b\rho a$ が成り立つので，$a = b$ である．したがって，A に最大元［最小元］が存在すればそれは唯一つである．一般に，順序集合には比較可能でない要素が含まれている可能性があるため，最大元や最小元は存在するとは限らない．

順序集合 (X, ρ) の部分集合 A に対して，集合 $U(A) = \{\, x \in X \mid \forall a \in A\ (a\rho x) \,\}$ を A の**上界集合**，$U(A) \neq \varnothing$ のとき A は**上に有界**，$U(A)$ の要素を A の**上界**という．上界集合 $U(A)$ に最小元が存在するとき，それを A の**上限**といい，$a = \sup A$ と表す．また，集合 $L(A) = \{\, x \in X \mid \forall a \in A\ (x\rho a) \,\}$ を A の**下界集合**，$L(A) \neq \varnothing$ のとき A は**下に有界**，$L(A)$ の要素を A の**下界**という．下界集合 $L(A)$ に最大元が存在するとき，それを A の**下限**といい，$a = \inf A$ と表す．

例題 5.3 n，m を任意の整数とする．$m - n$ が 5 で整除されるとき $m \sim n$ と定めると，二項関係 $\sim$ は整数の全体 $\mathbb{Z}$ 上の同値関係である．また，同値関係 $\sim$ に関して $n \in \mathbb{Z}$ を代表元とする同値類 $[n]$ は $[n] = \{\, n + 4k \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ と表せることを示せ．

（解） (R1) m を任意の整数とすると，$m - m = 0 = 5 \cdot 0$ より $m \sim m$ である．(R2) $m \sim n$ とする．ある $p \in \mathbb{Z}$ が存在し $m - n = 5 \cdot p$ と表され，$-p \in \mathbb{Z}$ であるから，$n - m = 5 \cdot (-p)$ となり，$n \sim m$ である．(R3) $m \sim n$ かつ $n \sim \ell$

とする．ある p，$q \in \mathbb{Z}$ が存在し $m - n = 5 \cdot p$，$n - \ell = 5 \cdot q$ と表され，$p + q \in \mathbb{Z}$ であるから，$m - \ell = 5 \cdot (p + q)$ となり，$m \sim \ell$ である．以上から，$\sim$ は整数の全体 $\mathbb{Z}$ 上の同値関係である．

$\mathbb{Z}$ の部分集合 A を $A = \{\, n + 4\,k \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ により定義する．$m \in [n]$ を任意にとると，$m \sim n$ より，ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して $m - n = 5 \cdot k$ が成り立つので，$m \in A$ である．したがって，$[n] \subset A$ である．逆に，$m \in A$ を任意にとると，集合 A の定義より，ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して $m = n + 5 \cdot k$ と表せるので，$m \sim n$，つまり，$m \in [n]$ である．したがって，$A \subset [n]$ である．以上から，$[n] = A$ が成り立つ．■

例題 5.4 $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0,0)\,\}$ とし，X における二項関係 $\sim$ を

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists r > 0\ (a_1 = r\, a_2\ \wedge\ b_1 = r\, b_2)$$

で定めると，$\sim$ は X 上の同値関係である．また，同値関係 $\sim$ に関して $(a,b) \in X$ を代表元とする同値類 $[(a,b)]$ は，ある $0 \le \theta < 2\,\pi$ を用いて $[(a,b)] = [(\cos\theta, \sin\theta)]$ と表せることを示せ．

(解)　(R1) $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$a = 1 \cdot a$，$b = 1 \cdot b$ より $(a,b) \sim (a,b)$ が成り立つ．(R2) $(a_1,b_1) \sim (a_2,b_2)$ とする．二項関係 $\sim$ の定義より，ある $r > 0$ を用いて $a_1 = r\,a_2$，$b_1 = r\,b_2$ と表される．$\hat{r} = 1/r$ とおくと，$\hat{r} > 0$ であり，$a_2 = \hat{r}\,a_1$，$b_2 = \hat{r}\,b_1$ となり，$(a_2,b_2) \sim (a_1,b_1)$ が成り立つ．(R3) $(a_1,b_1) \sim (a_2,b_2)$ かつ $(a_2,b_2) \sim (a_3,b_3)$ とする．二項関係 $\sim$ の定義より，ある $r_1 > 0$，$r_2 > 0$ が存在して，

$$a_1 = r_1\, a_2, \qquad b_1 = r_1\, b_2, \qquad a_2 = r_2\, a_3, \qquad b_2 = r_2\, b_3$$

が成り立つ．$r = r_1\, r_2$ とおくと，$r > 0$ であり，$a_1 = r\,a_3$，$b_1 = r\,b_3$ となり，$(a_1,b_1) \sim (a_3,b_3)$ が成り立つ．以上から，$\sim$ は X 上の同値関係である．

任意の $(a,b) \in X$ に対して，

$$\cos\theta = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

をみたす $0 \le \theta < 2\,\pi$ が存在し，

$$a = (a^2 + b^2) \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} = (a^2 + b^2) \cdot \cos\theta, \qquad b = (a^2 + b^2) \cdot \frac{b}{a^2 + b^2} = (a^2 + b^2) \cdot \sin\theta$$

より $(a,b) \sim (\cos\theta, \sin\theta)$ である．したがって，$[(a,b)] = [(\cos\theta, \sin\theta)]$ となる．■

例題 5.5 閉区間 $[0,1]$ 上の実数値関数 $f(t)$ の全体を $F[0,1]$ で表す．$F[0,1]$ における二項関係 $\preceq$ を

$$f \preceq g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall t \in [0,1]\ \ (f(t) \le g(t))$$

により定義するとき，$(F[0,1], \preceq)$ は順序集合であることを示せ．

(解)　(O1) すべての $t \in [0,1]$ に対して $f(t) \le f(t)$ であるから，$f \le f$ である．(O2) $f \le g$ かつ $g \le f$ とすると，すべての $t \in [0,1]$ に対して，$f(t) \le g(t)$ かつ $g(t) \le f(t)$ より $f(t) = g(t)$ である．つまり，$f = g$ である．(O3) $f \le g$ かつ $g \le h$ とすると，すべての $t \in [0,1]$ に対して，$f(t) \le g(t)$ かつ $g(t) \le h(t)$ より $f(t) \le h(t)$ である．つまり，$f \le h$ である．以上から，$(F[0,1], \preceq)$ は順序集合である．■

例題 5.6 $X = \{\,1,2,3,4,5,6\,\}$ における二項関係 $\preceq$ を

$$n \preceq m \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \ell \in \mathbb{N}\ \ (m = \ell\, n)$$

により定義するとき，$(X, \preceq)$ は順序集合であることを示せ．また，X の部分集合 $A = \{\,1,2,3\,\}$ には最小元，最大元が存在するかどうか調べよ．

(解)　(O1) $n = 1 \cdot n$ より $n \preceq n$ である．(O2) $n \preceq m$ かつ $m \preceq n$ とする．ある ℓ_1，$\ell_2 \in \mathbb{N}$ が存在して $m = \ell_1 n$，$n = \ell_2 m$ が成り立つので，$\ell = \ell_1 \ell_2 \in \mathbb{N}$ であり，$n = \ell n$ となる．$\ell = 1$ より $\ell_1 = 1$，$\ell_2 = 1$ であるから，$n = m$ が成り立つ．(O3) $n \preceq m$ かつ $m \preceq k$ とする．ある ℓ_1，$\ell_2 \in \mathbb{N}$ が存在して $m = \ell_1 n$，$k = \ell_2 m$ が成り立つので，$\ell = \ell_1 \ell_2 \in \mathbb{N}$ であり，$k = \ell n$ となる．つまり，$n \preceq k$ である．以上から，$(X, \preceq)$ は順序集合である．

すべての $n \in A$ に対して，$n = n \cdot 1$，$n \in \mathbb{A}$ より $1 \preceq n$ であるから，$1 = \min A$ である．2 と 3 には順序関係 $\preceq$ で順序をつけることができないので，$\max A$ は存在しない．■

例題 5.7 $\mathbb{R}$ において，通常の順序 $\leq$ に関して $A = [0, 1)$ の最大元，最小元，上限，下限について調べよ．

(解)　$0 \in \mathbb{A}$ と，すべての $x \in A$ に対して $0 \leq x$ であることから，$1 = \min A$ である．すべての $x \in A$ に対して，$y = (1 + x)/2$ は $x < y < 1$ をみたし，$y \in A$ となるので，$\max A$ は存在しない．また，A の上界集合 $U(A)$ は $U(A) = [1, +\infty)$ であり，A の下界集合 $L(A)$ は $L(A) = (-\infty, 0]$ であるから，

$$\sup A = \min U(A) = 1, \qquad \inf A = \max L(A) = 0$$

となる．■

第 6 章

濃度

6.1 集合の濃度

集合 A が有限個の要素からなる集合とするとき，A から要素を 1 個ずつ取り出し，1 番目に番号 1 を，2 番目に番号 2 を，以下この操作を繰り返す．最後のものに番号 n を付けたとすると，A は n 個の要素からなっていることになる．この過程では集合の各要素と自然数の対応を作っており，これを一般化してみよう．2 つの集合 A，B に対して，A から B への全単射が存在するとき，A と B は**対等**であるといい，$A \sim B$ と表すことにする．(R1) $id_A : A \to A$ は全単射であるから，$A \sim A$ である．(R2) $A \sim B$ とすると，全単射 $f : A \to B$ が存在する．このとき，f の逆写像 $f^{-1} : B \to A$ が存在し，全単射である．したがって，$B \sim A$ である．(R3) $A \sim B$，$B \sim C$ とすると，全単射 $f : A \to B$，$g : B \to C$ が存在する．このとき，合成写像 $g \circ f : A \to C$ も全単射であるから，$A \sim C$ である．したがって，集合の対等 $\sim$ は同値関係である．

集合 A と B が対等であるとき，A と B は同じ**濃度**または**基数**をもつといい，集合 A の濃度を $\mathrm{card}\,A$ と表す．$\{1, 2, \cdots, n\}$ と対等な集合の濃度を n と定める．空集合 $\varnothing$ の濃度を 0 と定める．n と 0 の濃度をもつ集合を**有限集合**という．有限集合でない集合を**無限集合**という．自然数の全体 $\mathbb{N}$ と対等な集合を**可算集合**または**可付番集合**といい，その湛度を $\aleph_0$ で表す．有限集合と可算集合を合わせて**たかだか可算**な集合という．

注意 6.1 $A \sim B$ を示すためには，A から B への全単射が存在するということだから，A から B への全単射が作れればよいということである．

例 6.2 E を正の偶数の集合，つまり，$E = \{2, 4, 6, \cdots\}$ とすると，$E \sim \mathbb{N}$ である．

(解) $f : \mathbb{N} \to E$ を各 $x \in \mathbb{N}$ に対して $f(x) = 2x$ で定義すると，f は全単射である．したがって，$\mathbb{N} \sim E$ である． ■

例 6.3 $[0, 1) \sim [0, 1]$ である．

(解) 写像 $f : [0, 1) \to [0, 1]$ を

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (x = 2^{-n},\ n \in \mathbb{N}) \\ x & (\text{その他}) \end{cases}$$

で定義すると，f は全単射である． ■

注意 6.4 上の例の証明と同様にして，$[0, 1] \sim [0, 1) \sim (0, 1] \sim (0, 1)$ であることが示せる．

6.2　加算集合

定理 6.5 $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ である．

(証明)　$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を

$$f(x) = \begin{cases} -m & (x = 2m-1,\ m \in \mathbb{N}) \\ m & (x = 2m,\ m \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

で定義すると，f は全単射であるから，$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ である．■

$\mathbb{Q}$ が可算集合であることを証明するために，つぎの補題を証明しておく．

補題 6.6 $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$ である．

(証明)　写像 $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ を

$$f(p,q) = \frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2} + p = \sum_{k=1}^{p+q-2} k + p$$

で定義する．$r \in \mathbb{N}$ が与えられたとき，

$$\frac{\ell(\ell-1)}{2} < r \leq \frac{\ell(\ell+1)}{2}$$

をみたす $\ell \in \mathbb{N}$ をとることができ，

$$p = r - \frac{\ell(\ell-1)}{2}, \qquad q = \ell - p + 1$$

とおくと，

$$1 \leq p \leq \frac{\ell(\ell+1)}{2} - \frac{\ell(\ell-1)}{2} = \ell, \qquad 1 \leq q \leq \ell$$

となり，$(p,q) \in \mathbb{N}^2$ である．したがって，f は全射である．$f(p_1,q_1) = f(p_2,q_2)$ とする．このとき，一般性を失うことなく，$p_1 + q_1 \leq p_2 + q_2$ を仮定してよい．$p_1 + q_1 < p_2 + q_2$ ならば，

$$p_1 - p_2 = \left(f(p_1,q_1) - \sum_{k=1}^{p_1+q_1-2} k \right) - \left(f(p_2,q_2) - \sum_{k=1}^{p_2+q_2-2} k \right) = \sum_{k=p_1+q_1-1}^{p_2+q_2-2} k \geq p_1 + q_1 - 1$$

より $0 \geq q_1 + q_2 - 1 \geq 1$ となり，矛盾である．したがって，$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = \ell$ である．

$$\sum_{k=1}^{\ell-2} k + p_1 = f(p_1,q_1) = f(p_2,q_2) = \sum_{k=1}^{\ell-2} k + p_2$$

より，$p_1 = p_2$ である．つまり，$(p_1,q_1) = (p_2,q_2)$ が成り立つ．ゆえに，$f(p,q)$ は単射である．以上のことから，$\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$ である．■

定理 6.7 $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ である．

(証明)　$\mathbb{N}^2$ の要素 (n,m) を有理数 m/n とみなすと，同じ有理数を表す要素 (n,m) がいくつか現れる場合があり，正の有理数全体の集合は $\mathbb{N}^2$ に含まれていると考えることができる．定理 6.6 から，正の有理数全体の集合を $\{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ と番号付けをすることができ，

$$\mathbb{Q} = \{0\} \cup \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ -a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

と表されるので，定理 6.5 の証明と同様に，$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ であることが示せる．■

集合 $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{N}$ との間には，濃度の違いがあるように思えるが，定理 6.7 はそれらの濃度が同じであることを示している．

6.3　非加算集合

次の定理は，$\mathbb{R}$ の濃度が $\mathbb{N}$ の濃度と異なること示している．

定理 6.8 $\mathbb{R}$ は加算集合ではない．

(証明) $I = (0,1)$ とする．例えば，$0.15 = 0.14999999\cdots$ のように，有限小数で終わるものには 2 通りの表現があることに注意する．ここでは，有限小数の場合には後者の表現方法を用いることにすると，I に属する数の小数展開は 1 通りになる．

$I \sim \mathbb{N}$ である，つまり，$I = \{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ と番号付けができると仮定する．このとき，各 a_n は

$$a_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}a_{n5}\cdots$$

と小数展開できる．ただし，各 a_{ij} は 0，1，2，$\cdots$，9 の何れかの値をとる．ここで，

$$b = 0.b_1b_2b_3b_4b_5\cdots$$

を

$$b_n = \begin{cases} 1 & (a_{nn} = 0 \mod 2) \\ 0 & (a_{nn} = 1 \mod 2) \end{cases}$$

により定義する．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$b_n \neq a_{nn}$ より $b \neq a_n$ である．一方，$2/9 = 0.\dot{2}$ より $b \in I$ であるから，ある $m \in \mathbb{N}$ に対して $b = a_m$ となるので，矛盾である．ゆえに，$I \not\sim \mathbb{N}$ である．

写像 $g : I \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \frac{x - \dfrac{1}{2}}{x\,(1-x)}$$

により定義すると，g は全単射であるから，$I \sim \mathbb{R}$ である．$\mathbb{R}$ が加算集合である，つまり，$\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$ であると仮定すると，$I \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{N} \not\sim I$ となり，矛盾である．ゆえに，$\mathbb{R}$ は加算集合ではない．■

注意 6.9 定理 6.8 の証明から，

$$\mathbb{R} \sim [0,1] \sim (0,1] \sim [0,1) \sim (0,1)$$

が成り立つ．

集合 $\mathbb{N}$ より濃度が大きい集合は**非可算集合**とよばれ，集合 $\mathbb{R}$ の濃度を $\aleph$ で表す．無限集合の中には，濃度が $\aleph_0$ と $\aleph$ の少なくとも 2 種類あることがわかる．

集合 A，B に対して，A から B への単射が存在するとき，A の濃度は B の濃度より**大きくない**といい，$\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ と表す．また，$\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ であり，A と B が対等でないときには，A の濃度は B の濃度より**小さい**といい，$\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$ と表す．

定理 6.10 (ベルンシュタインの定理) 集合 A, B に対して，$\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ かつ $\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} A$ ならば，$\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$ が成り立つ．

(証明) 単射 $f : A \to B$ と $g : B \to A$ が存在すると仮定して，$A \sim B$ を示せばよい．$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし，A の部分集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ および B の部分集合列 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ を

$$A_0 = A \setminus g(B), \qquad B_0 = B \setminus f(A), \qquad A_{n+1} = g(B_n), \qquad B_{n+1} = f(A_n), \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

により定義する．すべての $n \in \mathbb{N}_0$ について，$A_{n+1} \sim B_n$ かつ $B_{n+1} \sim A_n$ である．また，$n \neq m$ ならば $A_n \cap A_m = \varnothing$，$B_n \cap B_m = \varnothing$ である．したがって，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して $A_{2n} \cup A_{2n+1} \sim B_{2n} \cup B_{2n+1}$ が成り立ち，

$$C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n, \qquad D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} B_n$$

は $C \sim D$ をみたす．また，$E = A \setminus C$，$F = B \setminus D$ とおいたとき，$E \sim F$ が示せればよい．

任意に $b \in f(E)$ をとる．このとき，ある $a \in E$ が存在して $f(a) = b$ が成り立つ．$f(a) \notin F$ ならば，$f(a) \in D$ より $f(a) \in B_{n+1} = f(A_n)$ となる $n \in \mathbb{N}_0$ が存在するので，ある $\hat{a} \in A_n$ がとれ $f(a) = f(\hat{a})$ となる．f は単射であるから，$a = \hat{a} \in A_n \subset C$ である．これは $a \in E$ に矛盾する．したがって，$b = f(a) \in F$ であるから，$f(E) \subset F$ となる．

逆に，任意に $b \in F$ をとる．F の定義より $F \cap B_0 = \varnothing$ であるから，$F \subset f(A)$ である．つまり，ある $a \in A$ がとれて $b = f(a)$ が成り立つ．$a \in C$ ならば，$a \in A_n$ をみたす $n \in \mathbb{N}_0$ が存在し，$b = f(a) \in f(A_n) = B_{n+1} \subset D$ となる．これは $b \in F$ に矛盾する．したがって，$a \notin C$，つまり，$a \in E$ である．$b = f(a) \in f(E)$ より，$F \subset f(E)$ が成り立つ．

以上から，$F = f(E)$ である．また，f は単射であるから，f を E から F への制限した写像は全単射である．したがって，$E \sim F$ である．■

第 7 章

複素数

7.1　複素数の定義

2 乗して -1 になる数を i で表し，これを**虚数単位**という．2 つの実数 a，b と虚数単位 i を用いて $z = a + i\,b$ $(= a + b\,i)$ と表される数 z を**複素数**という．また，複素数 $z = a + i\,b$ における実数 a，b をそれぞれ z の**実部**，**虚部**といい，$\mathrm{Re}\,z$，$\mathrm{Im}\,z$ と表す．$\mathrm{Im}\,z = 0$ のときには，$z = a + i\,0 = a$ であるから，z は実数である．$\mathrm{Re}\,z = 0$ のときには，$z = 0 + i\,b = i\,b$ となり，このような複素数を**純虚数**という．複素数 z_1，z_2 において，実部と虚部が共に等しいとき，$z_1 = z_2$ と定める．つまり，

$$z_1 = z_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Re}\,z_1 = \mathrm{Re}\,z_2 \ \wedge\ \mathrm{Im}\,z_1 = \mathrm{Im}\,z_2$$

により，複素数の相等を定義する．

7.2　複素数の和・差

複素数 $z_1 = a_1 + i\,b_1$，$z_2 = a_2 + i\,b_2$ の和 $z_1 + z_2$ を

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$$

により定義する．つまり，複素数の和において，得られる複素数は，実部同士の和を実部，虚部同士の和を虚部としたものである．$0 = 0 + i\,0$ と考え，複素数 $z = a + i\,b$ に対して $(-a) + i\,(-b)$ を $-z$ と表すことにすると，すべての複素数 z_1，z_2，z_3 に対して，次の性質が成り立つ．

交換法則	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
結合法則	$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
単位元の存在	$z_1 + 0 = z_1 = 0 + z_1$
逆元の存在	$z_1 + (-z_1) = 0 = (-z_1) + z_1$

また，複素数 z_1 と z_2 の差 $z_1 - z_2$ を

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

で定義する．

7.3　複素数の積・商

複素数 $z_1 = a_1 + i\,b_1$，$z_2 = a_2 + i\,b_2$ の積 $z_1 \cdot z_2$ を

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1)$$

により定義する．実数の場合と同様に，積 $z_1 \cdot z_2$ において記号 $\cdot$ を省略したり，記号 $\cdot$ の代わりに記号 $\times$ を用いることがある．$1 = 1 + i\,0$ と考え，0 でない複素数 $z = a + i\,b$ に対して

$$\frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{-b}{a^2+b^2}$$

を z^{-1} または $\dfrac{1}{z}$ と表すことにすると，すべての複素数 z_1，z_2，z_3 に対して，次の性質が成り立つ．

交換法則	$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
結合法則	$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
単位元の存在	$z_1 \cdot 1 = z_1 = 1 \cdot z_1$
逆元の存在	$z_1 \neq 0$ のとき $z_1 \cdot z_1^{-1} = 1 = z_1^{-1} \cdot z_1$
分配法則	$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

複素数 z_1 と z_2 （$z_2 \neq 0$）の商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ を

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

により定義する．また，n が正の整数，z が複素数のとき，$z^n = z \cdot z \cdots z$ （z を n 回かけたもの）が定義される．さらに，$z \neq 0$ の場合，$n = 0$ のときには $z^n = 1$，n が負の整数のときには $z^n = \dfrac{1}{z^{|\,n\,|}}$ と定める．

7.4 共役複素数

複素数 $z = a + i\,b$ に対して，複素数 $a - i\,b$ を z の**共役複素数**といい，$\overline{z}$ と表す．このとき，

$$a = \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad b = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2\,i}$$

であることがわかる．すべての複素数 z_1，z_2 に対して，

$$\overline{\overline{z_1}} = z_1, \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

が成り立つ．

7.5 複素数の絶対値

複素数 $z = a + i\,b$ の絶対値 $|\,z\,|$ を

$$|\,z\,| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

により定める．すべての複素数 z_1，z_2 に対して，次の性質が成り立つ．

(1) $|\,z_1\,| = |\,-z_1\,| = |\,\overline{z_1}\,| \geq 0$，$|\,z_1\,|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1}$
(2) $|\,z_1\,| \geq |\operatorname{Re} z_1\,|$，$|\,z_1\,| \geq |\operatorname{Im} z_1\,|$
(3) $|\,z_1 \cdot z_2\,| = |\,z_1\,|\,|\,z_2\,|$
(4) $|\,z_1 + z_2\,| \leq |\,z_1\,| + |\,z_2\,|$ 　　（三角不等式）

上の性質 (1) から，0 でない複素数 $z = a + i\,b$ に対して

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|\,z\,|^2} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{-b}{a^2+b^2}$$

と表せる．

例題 7.1 複素数 $z_1 = 2 + i$，$z_2 = -1 + 2\,i$ に対して，次の複素数を $a + i\,b$ の形に表せ．

$$z_1\,z_2 - 3\,z_1, \qquad \frac{2\,z_1 + z_2}{z_1 - 2\,z_2}, \qquad \frac{z_2}{2} + \frac{1}{z_1}$$

(解)　演算の定義より

$$\begin{aligned}
z_1\,z_2 - 3\,z_1 =& z_1\,(z_2 - 3) = (2 + i)\,(-4 + 2\,i) = 2\,(i^2 - 2^2) = -10, \\
\frac{2\,z_1 + z_2}{z_1 - 2\,z_2} =& \frac{3 + 4\,i}{4 - 3\,i} = \frac{-3\,i^2 + 4\,i}{4 - 3\,i} = \frac{i\,(4 - 3\,i)}{4 - 3\,i} = i, \\
\frac{z_2}{2} + \frac{1}{z_1} =& \frac{z_2}{2} + \frac{\overline{z_1}}{|\,z_1\,|^2} = \frac{-1 + 2\,i}{2} + \frac{2 - i}{2^2 + 1^2} = \frac{-1 + 8\,i}{10} = -\frac{1}{10} + i\,\frac{4}{5}
\end{aligned}$$

となる．■

例題 7.2 複素数 z_1，z_2 に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad |\,z_1 \cdot z_2\,| = |\,z_1\,|\,|\,z_2\,|$$

(解)　実数 a_1，b_1，a_2，b_2 を用いて $z_1 = a_1 + i\,b_1$，$z_2 = a_2 + i\,b_2$ と表す．和と複素共役の定義より，

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} =& \overline{(a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)} = (a_1 + a_2) - i\,(b_1 + b_2) \\
=& (a_1 - i\,b_1) + (a_2 - i\,b_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}
\end{aligned}$$

となる．また，

$$z_1\,z_2 = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1)$$

より

$$\begin{aligned}
|\,z_1\,z_2\,|^2 =& (a_1\,a_2 - b_1\,b_2)^2 + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)^2 \\
=& a_1^2\,a_2^2 + b_1^2\,b_2^2 + a_1^2\,b_2^2 + a_2^2\,b_1^2 = (a_1^2 + b_1^2)\,(a_2^2 + b_2^2) = |\,z_1\,|^2\;|\,z_2\,|^2
\end{aligned}$$

が得られるので，$|\,z_1 \cdot z_2\,| = |\,z_1\,|\,|\,z_2\,|$ が成り立つ．■

例題 7.3 複素数 z_1，z_2 に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|\,z_1 + z_2\,| \leq |\,z_1\,| + |\,z_2\,|$$

(解)　$\mathrm{Re}\,z \leq |\,z\,| = z\,\overline{z}$，$z + \overline{z} = 2\ \mathrm{Re}\,z$ より

$$\begin{aligned}
|\,z_1 + z_2\,|^2 =& (z_1 + z_2)\,\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)\,(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
=& z_1\,\overline{z_1} + z_1\,\overline{z_2} + z_2\,\overline{z_1} + z_2\,\overline{z_2} = |\,z_1\,|^2 + z_1\,\overline{z_2} + \overline{z_1\,\overline{z_2}} + |\,z_2\,|^2 \\
=& |\,z_1\,|^2 + 2\ \mathrm{Re}(z_1\,\overline{z_2}) + |\,z_2\,|^2 \leq |\,z_1\,|^2 + 2\ |\,z_1\,\overline{z_2}\,| + |\,z_2\,|^2 \\
=& |\,z_1\,|^2 + 2\ |\,z_1\,|\,|\,\overline{z_2}\,| + |\,z_2\,|^2 = |\,z_1\,|^2 + 2\ |\,z_1\,|\,|\,z_2\,| + |\,z_2\,|^2 = (|\,z_1\,| + |\,z_2\,|)^2
\end{aligned}$$

であるから，$|\,z_1 + z_2\,| \leq |\,z_1\,| + |\,z_2\,|$ が成り立つ．■

例題 7.4 関係式

$$z^2 = \frac{7 + \sqrt{15}\,i}{\overline{z}}$$

をみたす複素数 z をすべて求めよ．

(解)　実数 a，b を用いて $z = a + i\,b$ と表す．

$$7 + \sqrt{15}\,i = z\,|\,z\,|^2 = (a + i\,b)\,(a^2 + b^2) = a\,(a^2 + b^2) + i\,b\,(a^2 + b^2)$$

より

$$7 = a\,(a^2 + b^2), \qquad \sqrt{15} = b\,(a^2 + b^2)$$

が得られ，$a > 0$，$b > 0$，$a^2 + b^2 > 0$ である．また，

$$\frac{7}{\sqrt{15}} = \frac{a\,(a^2 + b^2)}{b\,(a^2 + b^2)} = \frac{a}{b}$$

より

$$7 = a\left\{a^2 + \left(\frac{\sqrt{15}\,a}{7}\right)^2\right\} = \frac{4^3\,a^3}{7^2}$$

であるから，$a = \dfrac{7}{4}$，$b = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ となる．■

第 8 章

幾何学的な性質

8.1　複素数平面

複素数 $z = a + i\,b$ をその実部と虚部の組 (a, b) に対応させることにより，複素数を平面上の点と同一視することができる．実部を x 軸，虚部を y 軸に取り，座標平面上で複素数を表したものを**複素数平面**または**ガウス平面**という．また，複素数平面における x 軸を**実軸**，y 軸を**虚軸**という．

複素数を複素数平面上で原点を始点とする平面ベクトルと見なせば，つまり，

$$a + i\,b \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と考えれば，複素数 $z = a + i\,b$ の絶対値 $|\,z\,| = \sqrt{a^2 + b^2}$ は，原点と (a, b) との距離，あるいは複素数 z に対応するベクトルの長さ（大きさ）を示している．また，複素数 $z_1 = a_1 + i\,b_1$，$z_2 = a_2 + i\,b_2$ の和は，対応するベクトルの和と見なせる．

$$\begin{aligned}(a_1 + i\,b_1) + (a_2 + i\,b_2) =& (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2) \\ &\longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

これらから，絶対値 $|\,z_1 - z_2\,|$ は，複素数平面上で z_1 と z_2 が表す 2 点間の距離を示していることが分かる．

8.2　極形式

平面上に 1 点 O とそこから出る半直線 OX を基準にして，O を除く平面上の点 P の位置を，OP の長さ r と，OX から OP への回転角 θ によって表すことができる．点 O を**極**または**原点**，半直線 OX を**始線**または**原線**，(r, θ) を P の**極座標**という．極座標 (r, θ) において，θ は反時計回りに測った角度であり，2π の整数倍だけの不定性があることに注意したい．また，極 O の極座標は $(0, \theta)$ とし，θ を不定としておく．

点 O を原点，点 X を $(1, 0)$ とした極座標がよく用いられる．このとき，原点 O を除く点 (a, b) と，それに対応する極座標 (r, θ) には次の関係がある．

$$a = r\,\cos\theta,\ b = r\,\sin\theta \qquad \longleftrightarrow \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \tan\theta = \frac{a}{b}$$

複素数 $z = a + i\,b$ は平面上の点 (a, b) と同一視できることから，点 (a, b) に対する極座標を用いて

$$z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

と表せる．これを複素数 z の**極形式**という．極形式において $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ は絶対値 $|\,z\,|$ であり，θ は $\tan\theta = a/b$ をみたす実軸の正の部分とのなす角である．θ は z の**偏角**と呼ばれ，$\theta = \arg z$ と表す．偏角は 2π の整数倍だけの不定性が

あるため, 予め偏角 θ の範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ などと決めておくと一意に定まる．例えば, $\phi = \tan^{-1}(b/a) \in (-\pi/2, \pi/2)$ とし,

$$\theta = \begin{cases} \phi & (a > 0) \\ \phi + \pi & (a < 0 \text{ かつ } b \geq 0) \\ \phi - \pi & (a < 0 \text{ かつ } b < 0) \\ \pi/2 & (a = 0 \text{ かつ } b > 0) \\ -\pi/2 & (a = 0 \text{ かつ } b < 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

により $\theta \in (-\pi, \pi]$ を定めてもよい．このように定められた θ を偏角の**主値**という．主値の取り方に決まりがあるわけではないので，$0 \leq \theta < 2\pi$ としても良い．

8.3 複素数の積

複素数 z_1，z_2 の積 $z_1 z_2$ が複素数平面上でどのような点になるか調べてみよう．極形式で

$$z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2)$$

と表されているとする．

$$\frac{1}{z_1} = \frac{\overline{z_1}}{|\,z_1\,|^2} = \frac{1}{r_1}(\cos\theta_1 - i\,\sin\theta_1) = \frac{1}{r_1}\{\cos(-\theta_1) + i\,\sin(-\theta_1)\}$$

より

$$\left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|\,z_1\,|}, \qquad \arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\arg z_1$$

である．また，三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \{r_1 (\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1)\}\,\{r_2 (\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2)\} \\ &= r_1 r_2\,\{(\cos\theta_1\,\cos\theta_2 - \sin\theta_1\,\sin\theta_2) + i\,(\cos\theta_1\,\sin\theta_2 + \sin\theta_1\,\cos\theta_2)\} \\ &= r_1 r_2\,\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\sin(\theta_1 + \theta_2)\} \end{aligned}$$

となり，$z_1 z_2$ は絶対値 $r_1 r_2$，偏角が $\theta_1 + \theta_2$ の極形式で与えられる複素数となる．したがって，

$$|\,z_1 z_2\,| = |\,z_1\,|\,|\,z_2\,|, \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

が成り立つ．自然数 n と複素数 z に対して，

$$\begin{aligned} |\,z^n\,| &= \left|\,z \cdot z^{n-1}\,\right| = |\,z\,|\,\left|\,z^{n-1}\,\right| = \cdots = |\,z\,|^n, \\ \arg z^n &= \arg(z \cdot z^{n-1}) = \arg z + \arg z^{n-1} = \cdots = n\,\arg z \end{aligned}$$

が成り立つので，$z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ のとき，z^n を極形式で表せば

$$z^n = r^n\,(\cos n\,\theta + i\,\sin n\,\theta)$$

となる．これを**ド・モアブルの公式**という．

8.4　直線と円

■直線の方程式　実数 x，y を用いて，複素数 z を $z = x + i\,y$ と表すと，

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2\,i} = \frac{i\,(\overline{z} - z)}{2}$$

である．複素数平面上の直線は実数 a，b，c を用いて $a\,x + b\,y + c = 0$ と表せるので，

$$0 = a \cdot \frac{z + \overline{z}}{2} + b \cdot \frac{i\,(\overline{z} - z)}{2} + c = \overline{A}\,z + A\,\overline{z} + B$$

が得られる．ここで，$A = (a + i\,b)/2$，$B = c$ であり，B は実数であることに注意したい．

■円の方程式　中心 α，半径 r の円の方程式は $|\,z - \alpha\,| = r$ であるから，

$$0 = |\,z - \alpha\,|^2 - r^2 = (z - \alpha)\,\overline{(z - \alpha)} - r^2 = (z - \alpha)\,(\overline{z} - \overline{\alpha}) - r^2 = z\,\overline{z} + \overline{A}\,z + A\,\overline{z} + B$$

となる．ここで，$A = -\alpha$，$B = |\,\alpha\,|^2 - r^2$ である．また，B は実数であり，$B < |\,A\,|^2$ であることに注意したい．

例題 8.1 次の複素数を極形式で表せ．

$$1 + i, \qquad \sqrt{3} - i, \qquad \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(1 + i\,\sqrt{3}\right), \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$$

(解)

$$\begin{aligned}
1 + i =& \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right), \\
\sqrt{3} - i =& 2\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{-1}{2}\right)\right\} = 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}, \\
\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(1 + i\,\sqrt{3}\right) =& \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
=& \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
=& \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right\} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\sin\frac{\pi}{12}\right), \\
\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10} =& \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10} = \cos\left(10 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(10 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

である．■

例題 8.2 方程式 $z^5 = 4\,\sqrt{2}\,i$ を解け．

(解)

$$|\,z\,|^5 = |\,z^5\,| = \left|\,4\,\sqrt{2}\,i\,\right| = 4\,\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^5$$

より，$|\,z\,| = \sqrt{2}$ である．また，

$$5\,\arg z = \arg z^5 = \arg\left(4\,\sqrt{2}\,i\right) = \frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi \qquad (n\ \text{は整数})$$

より，

$$\arg z = \frac{\pi + 4\,n\,\pi}{10} \qquad (n\ \text{は整数})$$

となる．$0 \leq \arg z < 2\pi$ をみたすものを求めればよいので，

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 4n\pi}{10} + i\sin\frac{\pi + 4n\pi}{10}\right), \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4$$

である．■

例題 8.3 0 でない複素数 z に対して，

$$|z+1| = |z| + 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \arg z = 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

が成り立つことを示せ．

(解)　$\Longrightarrow$ と $\Longleftarrow$ がともに成り立つことを示せばよい．
$(\Longrightarrow)$　$z = a + ib$ とおく．$|z|^2 = a^2 + b^2$，$|z+1|^2 = (a+1)^2 + b^2$ より

$$0 = |z+1|^2 - (|z|+1)^2 = 2\left(a - \sqrt{a^2+b^2}\right)$$

であり，$b = 0$，$a = \sqrt{a^2} > 0$ が得られる．z は正の実数であるから，ある整数 n に対して $\arg z = 2n\pi$ となる．
$(\Longleftarrow)$　仮定より z は正の実数となるので，$|z| = z$，$|z+1| = z+1$ である．したがって，

$$|z+1| = z + 1 = |z| + 1$$

が成り立つ．■

第 9 章

一次分数変換

9.1　一次分数変換とは

複素数 a，b，c，d は $a\,d-b\,c \neq 0$ をみたすとする．写像

$$f(z)=\frac{a\,z+b}{c\,z+d}$$

を**一次分数関数**といい，この関数による変換 $w=f(z)$ を**一次分数変換**という．$c=0$ のときには，$d\neq 0$ より

$$f(z)=\frac{a}{d}\,z+\frac{b}{d} \qquad \text{(相似拡大と回転，平行移動)}$$

となる．また，$c\neq 0$ のときには，

$$f(z)=\frac{a}{c}-\frac{\dfrac{a\,d-b\,c}{c^2}}{z+\dfrac{d}{c}}$$

と表せるので，$f(z)$ は次の 4 つの関数を順に合成した関数である．

(1)　$z_1=z+\dfrac{d}{c}$　(平行移動)

(2)　$z_2=\dfrac{1}{z_1}$　(反転)

(3)　$z_3=-\dfrac{a\,d-b\,c}{c^2}\,z_2$　(相似拡大と回転)

(4)　$w=z_3+\dfrac{a}{c}$　(平行移動)

9.2　リーマン球面

複素数平面を 3 次元の (ξ,η,ζ) 空間の (ξ,η) 平面と同一視する．複素数 $z=x+i\,y$ は点 $\mathrm{P}(x,y,0)$ に対応する．原点を中心とする単位球面

$$S=\left\{\,(\xi,\eta,\zeta)\;\middle|\;\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1\,\right\}$$

を考え，この球面上の「北極」にあたる点を $\mathrm{N}(0,0,1)$ とする．点 $\mathrm{Q}(\xi,\eta,\zeta)$ を N 以外の単位球面 S 上の点とする．2 点 N，Q を通る直線と平面 $\zeta=0$ との交点は一意的に存在し，

$$\left(\frac{\xi}{1-\zeta},\frac{\eta}{1-\zeta},0\right)$$

と表せる．これは球面上の点を平面上の点に対応させる（投影する）方法の一つであり，これを**ステレオ投影**という．逆に，2 点 N，P を通る直線と単位球面 S との交点は一意的に存在し，$z = x + i\,y$ とおくと

$$\left(\frac{2\,\mathrm{Re}\,z}{|\,z\,|^2+1}, \frac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|\,z\,|^2+1}, \frac{|\,z\,|^2-1}{|\,z\,|^2+1}\right)$$

と表せる．したがって，ステレオ投影は，複素数平面と，単位球面から点 N を除いた集合との間の全単射を与えている．このとき，単位球面 S を**リーマン球面**または**複素球面**という．点 N に対応する点が複素数平面にないので，対応

$$\mathrm{Q} \to \mathrm{N} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\,z\,| \to +\infty$$

を考慮して，**無限遠点**と呼ばれる仮想的な数 ∞ を複素数の集まり $\mathbb{C}$ に添加すると，$\mathbb{C} \cup \{\,\infty\,\}$ は S と同一視できる．

9.3　直線と円

a，b，c を実数とする．(ξ, η) 平面上の直線 $a\,\xi + b\,\eta + c = 0$ は，2 つの平面 $\zeta = 0$ と

$$a\,\xi + b\,\eta + c\,(1-\zeta) = 0$$

の共通部分である．したがって，複素数平面上の直線は，ステレオ投影によって，点 N を通る単位球面 S 上の円に対応する．

また，実数 a，b，r を用いて，複素数平面上の円は $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ と表せる．

$$z = x + i\,y, \qquad c = \frac{a^2+b^2-r^2-1}{2}, \qquad d = \frac{r^2-a^2-b^2-1}{2}$$

とおくと，ステレオ投影により

$$\begin{aligned} 0 = \frac{r^2-(x-a)^2-(y-b)^2}{|\,z\,|^2+1} &= \frac{2\,a\,\mathrm{Re}\,z + 2\,b\,\mathrm{Im}\,z + c\left(|\,z\,|^2-1\right) + d\left(|\,z\,|^2+1\right)}{|\,z\,|^2+1} \\ &= a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta + d \end{aligned}$$

となる．複素数平面上の直線と同様に，複素数平面上の円は，ステレオ投影によって，単位球面 S 上の円に対応する．

以上のように複素数平面上の直線および円は単位球面 S 上では円に対応することから，複素数平面上の直線や円を総称して**円**という．

例題 9.1 $-2\,i$ を 3，0 を -1，i を 0 に写す一次分数変換 $w = \dfrac{a\,z+b}{c\,z+d}$ を求めよ．

(解)　仮定より

$$3 = \frac{a\cdot(-2\,i)+b}{c\cdot(-2\,i)+d}, \qquad -1 = \frac{a\cdot 0+b}{c\cdot 0+d}, \qquad 0 = \frac{a\cdot i+b}{c\cdot i+d}$$

であるから，$b = -i\,a$，$c = a$，$d = -b = i\,a$ となり，

$$w = \frac{a\,z - i\,a}{a\,z + i\,a} = \frac{z-i}{z+i}$$

が得られる．■

例題 9.2 一次分数変換 $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ によって，虚軸 $\mathrm{Re}\,z = 0$ が写される図形を求めよ．

(解)　虚軸上の複素数 z は実数 b を用いて $z=ib$ と表されるので，

$$w=\frac{ib-i}{ib+i}=\frac{b-1}{b+1}$$

より w は実数である．$b=-1$ のとき $w=\infty$，$b=\infty$ のとき $w=1$ と考えることにより，実軸 $\operatorname{Im} w=0$ 全体に写される．■

例題 9.3 複素数 z，w がそれぞれ $|z|<1$，$|w|<1$ をみたすとき，次の不等式が成り立つ．

$$\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}\,z}\right|<1$$

(解)

$$\begin{aligned}|1-\overline{w}\,z|^2-|z-w|^2&=(1-\overline{w}\,z)\,(1-w\,\overline{z})-(z-w)\,(\overline{z}-\overline{w})\\&=\left(1-|z|^2\right)\,\left(1-|w|^2\right)>0\end{aligned}$$

より $|1-\overline{w}\,z|>|z-w|$ が得られ，

$$\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}\,z}\right|=\frac{|z-w|}{|1-\overline{w}\,z|}<1$$

となる．■

例題 9.4 α を複素数とする．一次分数変換 $w=z+\alpha$ によって，円は円に写されることを示せ．

(解)　複素数平面上の直線の方程式は，複素数 A と実数 B を用いて $\overline{A}\,z+A\,\overline{z}+B=0$ と表せる．ここで，複素数 z が実数であることと，$\overline{z}=z$ をみたすことは同値であることに注意する．$C=B-\overline{A}\,\alpha-A\,\overline{\alpha}$ とおくと，

$$\overline{C}=\overline{B-\overline{A}\,\alpha-A\,\overline{\alpha}}=\overline{B}-\overline{\overline{A}}\,\overline{\alpha}-\overline{A}\,\overline{\overline{\alpha}}=B-A\,\overline{\alpha}-\overline{A}\,\alpha=C$$

となり，C は実数である．直線の方程式に $z=w-\alpha$ を代入すると，

$$0=\overline{A}\,(w-\alpha)+A\,\overline{(w-\alpha)}+B=\overline{A}\,w+A\,\overline{w}+C$$

となり，複素数平面上の直線は直線に写される．

また，複素数平面上の円の方程式は，複素数 A と実数 B を用いて $z\,\overline{z}+\overline{A}\,z+A\,\overline{z}+B=0$ と表せる．ただし，$|A|^2>B$ である．

$$D=A-\alpha,\qquad E=\alpha\,\overline{\alpha}-\overline{A}\,\alpha-A\,\overline{\alpha}+B$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\overline{E}=&\overline{\alpha}\,\alpha-A\,\overline{\alpha}-\overline{A}\,\alpha+B=E,\\|D|^2-E=&(A-\alpha)\,\overline{(A-\alpha)}-\left(\alpha\,\overline{\alpha}-\overline{A}\,\alpha-A\,\overline{\alpha}+B\right)=|A|^2-B\end{aligned}$$

より，E は実数であり，$|D|^2>E$ が成り立つ．円の方程式に $z=w-\alpha$ を代入すると，

$$0=(w-\alpha)\,\overline{(w-\alpha)}+\overline{A}\,(w-\alpha)+A\,\overline{(w-\alpha)}+B=w\,\overline{w}+\overline{D}\,w+D\,\overline{w}+E$$

となり，複素数平面上の円は円に写される．

以上から，一次分数変換 $w=z+\alpha$ により，円は円に写される．■

例題 9.5 α を 0 でない複素数とする．一次分数変換 $w=\alpha\,z$ によって，円は円に写されることを示せ．

(解)　複素数平面上の直線の方程式は，複素数 A と実数 B を用いて $\overline{A}\,z + A\,\overline{z} + B = 0$ と表せる．$C = \dfrac{A}{\overline{\alpha}}$ とおき，直線の方程式に $z = \dfrac{w}{\alpha}$ を代入すると，

$$0 = \overline{A}\left(\frac{w}{\alpha}\right) + A\,\overline{\left(\frac{w}{\alpha}\right)} + B = \frac{\overline{A}}{\alpha}\,w + \frac{A}{\overline{\alpha}}\,\overline{w} + B = \overline{C}\,w + C\,\overline{w} + B$$

となり，複素数平面上の直線は直線に写される．

また，複素数平面上の円の方程式は，複素数 A と実数 B を用いて $z\,\overline{z} + \overline{A}\,z + A\,\overline{z} + B = 0$ と表せる．ただし，$|\,A\,|^2 > B$ である．$C = \alpha\,A$，$D = |\,\alpha\,|^2\,B$ とおくと，D は実数であり，

$$|\,C\,|^2 - D = |\,\alpha\,|^2\,|\,A\,|^2 - |\,\alpha\,|^2\,B = |\,\alpha\,|^2\left(|\,A\,|^2 - B\right) > 0$$

である．$w = \alpha\,z$ より，

$$0 = \alpha\,\overline{\alpha}\,\left(z\,\overline{z} + \overline{A}\,z + A\,\overline{z} + B\right) = w\,\overline{w} + \overline{C}\,w + C\,\overline{w} + D$$

となり，複素数平面上の円は円に写される．

以上から，一次分数変換 $w = \alpha\,z$ により，円は円に写される．■

第 10 章

整式

10.1　因数定理

$3\,z^2$，$a^2\,z$ のように定数および不定元の積で表される式を**単項式**，$3\,x^2+a^2\,z$ のように単項式の和として表される式を**多項式**といい，単項式と多項式を併せて**整式**という．ここでは，不定元を z，実数または複素数 a_0，a_1，$\cdots$，a_n を用いて

$$f(z)=a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n\,-\,1}+\cdots+a_1\,x+a_0$$

と表される整式を扱う．このとき，各定数 a_k を整式 $f(z)$ の**係数**という．また，$a_k\neq 0$ となる最大の k を整式 $f(z)$ の**次数**といい，$\deg f(z)$ と表す．

$\gamma\in\mathbb{C}$ とし，整式 $f(z)$ を整式 $(z-\gamma)$ で割ったときの商を $Q(z)$，余りを R とすると，

$$f(z)=(z-\gamma)\,Q(z)+R$$

が成り立つ．実際に，$t=z-\gamma$ とおき，$f(z)=f(t+\gamma)$ を展開して，t について整理し直すことにより，

$$f(t+\gamma)=q_n\,t^n+q_{n-1}\,t^{n\,-\,1}+\cdots+q_1\,t+q_0$$

が得られ，$R=q_0$，

$$Q(z)=q_n\,(z-\gamma)^{n-1}+q_{n-1}\,(a-\gamma)^{n-2}+\cdots+q_2\,(z-\gamma)+q_1$$

である．$z=\gamma$ を代入すると $R=f(\gamma)$ であるから，次が成り立つ．

定理 10.1 (剰余の定理・因数定理)　(1) 整式 $f(z)$ を整式 $(z-\gamma)$ で割ったときの余りは $f(\gamma)$ である．
(2) 整式 $f(z)$ が整式 $(x-\gamma)$ で割り切れるための必要十分条件は $f(\gamma)=0$ である．

整式 $f(z)$ が与えられたとき，方程式 $f(z)=0$ の解 $z=\gamma$ を $f(z)$ の**零点**という．また，ある整式 $g(z)$ と自然数 m を用いて

$$f(z)=(z-\gamma)^m\,g(z),\qquad g(\gamma)\neq 0$$

と表せるとき，$z=\gamma$ は $f(z)$ の m **位の零点**であるといい，m を零点 $z=\gamma$ の**重複度**という．

10.2　代数学の基本定理

整式 $f(z)$ の表す $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への複素関数は，$\mathbb{C}$ において**正則**（複素微分可能）であることが知られており，整式を含む正則な複素関数について次のことが知られている．

定理 10.2 (リュービルの定理) 複素関数 $f(z)$ は $\mathbb{C}$ において正則であり，すべての $z\in\mathbb{C}$ に対して $|\,f(z)\,|\leq M$ をみたす定数 M が存在するものとする．このとき，$f(z)$ は定数関数である．

定理 10.3 (代数学の基本定理) $n \geq 1$ とする．次数 n の整式

$$f(z) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n\,-\,1} + \cdots + a_1\, x + a_0, \qquad a_k \in \mathbb{C} \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

は複素数の範囲で零点をもつ．

(証明)　$f(z)$ は複素数の範囲で零点をもたないと仮定する．$a_n \neq 0$ であるから，$f(z)$ は定数関数ではない．

$$R = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$$

とおくと，明らかに $R \geq 1$ である．$|\,z\,| \geq R$ のとき，三角不等式より

$$\left| \frac{f(z)}{a_n\, z^n} \right| \geq 1 - \frac{1}{|\,z\,|} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| |\,z\,|^{k-(n-1)} \geq 1 - \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| = 1 - \frac{R-1}{R} = \frac{1}{R}$$

であるから，$|\,z\,| \to +\infty$ のとき $|\,f(z)\,| \to \infty$ である．$g(z) = 1/f(z)$ とおくと，$g(z)$ は $\mathbb{C}$ において正則であり，すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$|\,g(z)\,| \leq \max\left\{ \max_{|\,z\,| \leq R} \left(\frac{1}{|\,f(x)\,|} \right), \frac{1}{R^{n-1}\,|\,a_n\,|} \right\}$$

が成り立つ．リュービルの定理より $g(z)$ は定数関数，つまり，$f(z)$ は定数関数となる．これは $f(z)$ が定数関数でないことに矛盾する．したがって，$f(z)$ は複素数の範囲で零点をもつ．■

系 10.4 次数 n の整式

$$f(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n\,-\,1} + \cdots + a_1\, z + a_0, \qquad a_k \in \mathbb{C} \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

は複素数の範囲で重複を許して n 個の零点をもつ．

(証明)　定理 10.3 により $f(z)$ は複素数の範囲で零点をもつので，それを $\gamma_1 \in \mathbb{C}$ とおくと，$f(z) = (z - \gamma_1)\, f_1(z)$ と書け，$f_1(z)$ は $(n-1)$ 次の整式である．これを帰納的に繰り返すと，$f(z)$ は

$$f(z) = a_n\, (z - \gamma_1)\, (z - \gamma_2) \cdots (z - \gamma_n), \qquad \gamma_k \in \mathbb{C} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

と表せ，複素数 γ_1，γ_2，$\cdots$，γ_n が $f(z)$ の零点である．■

次数 n の整式

$$f(z) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0, \qquad a_k \in \mathbb{R} \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

を実数の範囲で因数分解してみよう．すべての k に対して $\overline{a_k} = a_k$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} \overline{f(z)} =& \overline{a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0} \\ =& a_n\, \overline{x}^n + a_{n-1}\, \overline{x}^{n-1} + \cdots + a_1\, \overline{x} + a_0 = f(\overline{z}) \end{aligned}$$

が得られ，γ が $f(z)$ の零点であれば，$\overline{\gamma}$ も $f(z)$ の零点である．このことから，$f(z)$ の零点を

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \cdots \quad , \quad \gamma_m, \quad \mu_1 \pm i\,\nu_1, \quad \mu_2 \pm i\,\nu_2, \quad \cdots \quad , \quad \mu_\ell \pm i\,\nu_\ell$$

とし，各零点 $z = \gamma_k$，$z = \mu_k \pm \nu_k$ の重複度をそれぞれ p_k，q_k する．ここで，γ_k，μ_k，ν_k は実数であり，特に $\nu_k > 0$ と仮定してよい．また，

$$n = \sum_{k=1}^{m} p_k + 2 \sum_{k=1}^{\ell} q_k$$

である．このとき，$f(z)$ は実数の範囲で

$$\begin{aligned} f(z) =& a_n \times \left[\prod_{k=1}^{m} (z-\gamma_k)^{p_k}\right] \times \left[\prod_{k=1}^{\ell} [\{z-(\mu_k+i\,\nu_k)\}^{q_k}\{z-(\mu_k-i\,\nu_k)\}^{q_k}]\right] \\ =& a_n \times \left[\prod_{k=1}^{m} (z-\gamma_k)^{p_k}\right] \times \left[\prod_{k=1}^{\ell} \left(z^2-2\,\mu_k\,z+\mu_k^2+\nu_k^2\right)^{q_k}\right] \end{aligned}$$

と因数分解できる．

例題 10.5 $f(z)=z-1$，$g(z)=z\,(z+1)$ であるとき，

$$p(z)\,f(z)+q(z)\,g(z)=1$$

をみたす整式 $p(z)$，$q(z)$ の組のなかで，$p(z)$ の次数が最小であるものを求めよ．

(解)　$g(z)=(z+2)\,(z-1)+2=(z+2)\,f(z)+2$ であるから

$$0=2\,\left(p(z)\,f(z)+q(z)\,g(z)\right)+(z+2)\,f(z)-g(z)=\left(2\,p(z)+z+2\right)\,f(z)+\left(2\,q(z)-1\right)\,g(z)$$

となる．$f(z)$ と $g(z)$ は互いに素（最大公約数が 1）であるから，ある整式 $h(z)$ を用いて

$$2\,p(z)+z+2=g(z)\,h(z), \qquad 2\,q(z)-1=-f(z)\,h(z)$$

と表される．$p(z)$ の次数が最小のものは $h(z)=0$ であるから，$p(z)=-(z+2)/2$，$q(z)=1/2$ である．■

例題 10.6 $f(z)$ は 2 次の整式とする．整式 $g(z)$ は $f(z)$ で割り切れないが，$\{g(z)\}^2$ は $f(z)$ で割り切れるとき，2 次方程式 $f(z)=0$ は重解をもつことを示せ．

(解)　$f(z)$ は 2 次の整式であるから，$g(z)$ を $f(z)$ で割ったときの余りは $a\,z+b$ と表すことができ，商を $h(z)$ とすると $g(z)=h(z)\,f(z)+a\,z+b$ となる．

$$\{g(z)\}^2=\left[\{h(z)\}^2\,f(z)+2\,(a\,z+b)\,h(z)\right]\,f(z)+(a\,z+b)^2$$

と表される．$(a\,z+b)^2$ は 2 次の整式 $f(z)$ で割り切れるので，ある定数 c を用いて $f(z)=c\,(a\,z+b)^2$ となる．$c\,a^2\neq 0$ より，方程式 $f(z)=0$ は重解 $z=-b/a$ をもつ．■

例題 10.7 $f(z)$ および $g(z)$ を整数係数の整式とし，$x\,y=1$ のとき常に $f(x)\,g(y)=1$ が成り立つとする．このとき．$f(z)$，$g(z)$ をすべて求めよ．

(証明)　$f(z)$，$g(z)$ を

$$\begin{aligned} f(z) =& f_n\,z^n+f_{n-1}\,z^{n-1}+\cdots+f_1\,z+f_0, \qquad & f_k\in\mathbb{Z}\quad (k=0,1,2,\cdots,n), \\ g(z) =& g_m\,x^m+g_{m-1}\,z^{m-1}+\cdots+g_1\,z+g_0, \qquad & g_k\in\mathbb{Z}\quad (k=0,1,2,\cdots,m) \end{aligned}$$

とおく．ここで，$f_n\neq 0$，$g_m\neq 0$ とし，

$$\exists p\in\mathbb{Z}\ \left(0\leq p\leq n\wedge f_p\neq 0\wedge\forall k\ (k<p\wedge f_k=0)\right), \qquad \exists q\in\mathbb{Z}\ \left(0\leq q\leq m\wedge g_q\neq 0\wedge\forall k\ (k<q\wedge g_k=0)\right)$$

をみたす p，q をとることができる．$y=1/x$ より，x に関する恒等式

$$\begin{aligned} x^m=x^m\,f(x)\,g\left(\frac{1}{x}\right) =& \left(f_n\,x^n+f_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots+f_{p+1}\,x^{p+1}+f_p\,x^p\right) \\ &\times\left(g_m+g_{m-1}\,x+\cdots+g_{q+1}\,x^{m-q-1}+g_q\,x^{m-q}\right) \end{aligned}$$

が得られる．上式の右辺において x の次数が最も小さい項は $f_p\, g_m\, x^p$ であり，$f_p \neq 0$，$g_m \neq 0$ であるから，$p = m$ でなければならない．また，上式の右辺において x の次数が最も大きい項は $f_n\, g_q\, x^{n+m-q}$ であり，$f_n \neq 0$，$g_q \neq 0$ であるから，$n + m - q = m$，つまり，$q = n$ でなければならない．$n < m$ ［$n > m$］なら，$p \leq n < m = p$ ［$q \leq m < n = q$］となり，矛盾である．したがって，$n = m$ であり，$f(z) = f_n\, z^n$，$g(z) = g_n\, z^n$ である．$f_n\, g_n = 1$ より，求める整式は

$$f(z) = g(z) = z^n, \qquad f(z) = g(z) = -z^n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

である．■

例題 10.8 $f(z)$ を複素数係数の整式 $f(z) = z^n + f_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + f_1\, z + f_0$ とし，

$$M = \max\{|\, f_0\,|, |\, f_1\,|, |\, f_2\,|, \cdots, |\, f_{n-1}\,|\}, \qquad N = M + 1$$

とおく．このとき，$f(z)$ のすべての零点は $|\, z\,| \leq N$ の範囲に含まれることを示せ．

(解)　$f(z)$ の零点で，$|\, z\,| > N$ をみたす複素数 w が存在すると仮定する．三角不等式より

$$\begin{aligned}
|\, w\,|^n &= |\, w^n\,| = \left|-\left(f_{n-1}\, w^{n-1} + f_{n-2}\, w^{n-2} + \cdots + f_1\, w + f_0\right)\right| \\
&\leq |\, f_{n-1}\,|\, |\, w\,|^{n-1} + |\, f_{n-2}\,|\, |\, w\,|^{n-2} + \cdots + |\, f_1\,|\, |\, w\,| + |\, f_0\,| \\
&\leq M\, \left(|\, w\,|^{n-1} + |\, w\,|^{n-2} + \cdots + |\, w\,| + 1\right) = \frac{M\, (|\, w\,|^n - 1)}{|\, w\,| - 1} < |\, w\,|^n - 1
\end{aligned}$$

となり，矛盾である．したがって，$f(z)$ のすべての零点は $|\, z\,| \leq N$ の範囲に含まれる．■

第 11 章

部分分数分解

11.1　有理関数

例えば

$$\frac{1}{z+1}, \qquad \frac{z+2}{z\,(z+1)}, \qquad \frac{z^3}{(z^2+1)^2}$$

のように，2 つの整式 $P(z)$，$Q(z)$ を用いて，$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ と表すことができる関数を**有理関数**という．このとき，$\deg Q(z)=n$ とし，$Q(z)$ の最大次数の係数は 1 と仮定する．また，$P(z)$ を $Q(z)$ を割ったときの商を $g(z)$，余りを $R(z)$ とすると，$g(z)$ は整式であり，

$$f(z)=g(z)+\frac{R(z)}{Q(z)}, \qquad \deg R(z)<\deg P(z)$$

と表せる．$Q(z)$ の相異なる零点を γ_k （$k=1$，2，$\cdots$，m），$\mu_k\pm\nu_k$ （$k=1$，2，$\cdots$，ℓ）とし，それらの重複度をそれぞれ p_k，q_k する．ここで，γ_k，μ_k，ν_k は実数であり，特に $\nu_k>0$ と仮定する．このとき，$Q(z)$ は実数の範囲で

$$Q(z)=\left[\prod_{k=1}^{m}(z-\gamma_k)^{p_k}\right]\times\left[\prod_{k=1}^{\ell}\left(z^2-2\,\mu_k\,z+\mu_k^2+\nu_k^2\right)^{q_k}\right]$$

と因数分解できる．

11.2　ユークリッドの互除法

整式 $h(z)\neq 0$ が整式 $f_1(z)$，$f_2(z)$，$\cdots$，$f_m(z)$ それぞれを割り切るとき，$h(z)$ を $f_1(z)$，$f_2(z)$，$\cdots$，$f_m(z)$ の**公約式**という．整式 $f_1(z)$，$f_2(z)$，$\cdots$，$f_m(z)$ の次数の最も高い公約式で，最高次の係数が 1 であるものを**最大公約式**といい，

$$\gcd(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_m(z))$$

と表す．$\gcd(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_m(z))=1$ であるとき，$f_1(z)$，$f_2(z)$，$\cdots$，$f_m(z)$ は**互いに素**であるという．

定理 11.1 整式 $f(z)$ を整式 $g(z)$ で割った余りを $h(z)$ とするとき，

$$\gcd(f(z),g(z))=\gcd(g(z),h(z))$$

となる．ここで，$\gcd(f(z),g(z))$ は $f(z)$ と $g(z)$ の最大公約数で，最高次の項の係数は 1 であるものを表す．

（証明） $f(z)$ を $g(z)$ で割った商を $\ell(z)$ とすると，$f(z)=g(z)\,\ell(z)+h(z)$ と書ける．また，$\gcd(f(z),g(z))=p(z)$，$\gcd(g(z),h(z))=q(z)$ とする．整式 $\tilde f(z)$，$\tilde g(z)$ を用いて，$f(z)=\tilde f(z)\,p(z)$，$g(z)=\tilde g(z)\,p(z)$ と表せるので，

$h(z) = (\tilde{f}(z) - \tilde{g}(z)\,\ell(z))\,p(z)$ となり，$p(z)$ は $g(z)$ と $h(z)$ の公約数である．したがって，$q(z)$ は $p(z)$ で割り切れる．逆に，整式 $\hat{g}(z)$，$\hat{h}(z)$ を用いて，$g(z) = \hat{g}(z)\,q(z)$，$h(z) = \hat{h}(z)\,q(z)$ と表せるので，$f(z) = (\hat{g}(z)\,\ell + \hat{h}(z))\,q(z)$ となり，$q(z)$ は $f(z)$ と $g(z)$ の公約数である．したがって，$p(z)$ は $q(z)$ で割り切れる．以上から，$p(z) = q(z)$ である．■

定理 11.2 整式 $f(z)$ と $g(z)$ が互いに素であるための必要十分条件は，ある整式 $P(z)$，$Q(z)$ が存在して

$$P(z)\,f(z) + Q(z)\,g(z) = 1 \tag{11.1}$$

が成り立つことである．

(証明) ($\Longrightarrow$)　$F_1(z) = f(z)$，$F_2(z) = g(z)$ とおく．各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$F_k(z)$ を $F_{k+1}(z)$ で割った商を $G_k(z)$，余りを $F_{k+2}(z)$ とする．ここで，各 k に対して $\deg F_k(z) > \deg F_{k+1}(z)$ としてよい．また，ある自然数 m が存在して，$F_{m+1}(z) = 0$ であり，すべての $k \le m$ に対して $F_k(z) \neq 0$ が成り立つとしてよい．$\gcd(f(z), g(z)) = 1$ であるから，$F_m(z)$ は 0 でない定数でなければならない．その定数を d とすると，

$$\begin{aligned} d =& F_{m-2}(z) - G_{m-2}(z)\,F_{m-1}(z) = F_{m-2}(z) - G_{m-2}(z)\,\left(F_{m-3}(z) - G_{m-3}(z)\,F_{m-2}(z)\right) \\ =& - G_{m-2}(z)\,F_{m-3}(z) + (1 - G_{m-2}(z)\,G_{m-3}(z))\,F_{m-2}(z) = \cdots \end{aligned}$$

と表されるので，各 k に対して，ある整式 $P_k(z)$，$Q_k(z)$ を用いて

$$d = P_k(z)\,F_{m-k-1}(z) + Q_k(z)\,F_{m-k}(z) \tag{11.2}$$

と表せると予想できる．(i) $P_1(z) = 1$，$Q_1(z) = -G_{m-2}(z)$ とおくことにより，$k = 1$ のとき (11.2) が成り立つ．(ii) $k = j$ のとき (11.2) が成り立つとする．

$$\begin{aligned} d =& P_j(z)\,F_{m-j-1}(z) + Q_j(z)\,F_{m-j}(z) \\ =& P_j(z)\,F_{m-j-1}(z) + Q_j(z)\,\left(F_{m-j-2}(z) - G_{m-j-2}(z)\,F_{m-j-1}(z)\right) \\ =& Q_j(z)\,F_{m-j-2}(z) + \left(P_j(z) - Q_j(z)\,G_{m-j-2}(z)\right)\,F_{m-j-1}(z) \end{aligned}$$

より，$P_{j+1}(z) = Q_j(z)$，$Q_{j+1}(z) = P_j(z) - Q_j(z)\,G_{m-j-2}(z)$ とおくことにより，$k = j + 1$ のときも (11.2) が成り立つとする．数学的帰納法より

$$1 = \frac{P_{m-2}(z)\,F_1(z) + Q_{m-2}(z)\,F_2(z)}{d} = \frac{P_{m-2}(z)}{d}\,f(z) + \frac{Q_{m-2}(z)}{d}\,g(z)$$

が得られるので，$P(z) = P_{m-2}(z)/d$，$Q(z) = Q_{m-2}(z)/d$ とおくことにより，(11.1) が成り立つ．
($\Longleftarrow$)　$\gcd(f(z), g(z)) = d(z)$ とする．このとき，整式 $\tilde{f}(z)$，$\tilde{g}(z)$ を用いて，$f(z) = \tilde{f}(z)\,d(z)$，$g(z) = \tilde{g}(z)\,d(z)$ と表せる．

$$1 = P(z)\,f(z) + Q(z)\,g(z) = \left(P(z)\,\tilde{f}(z) + Q(z)\,\tilde{g}(z)\right)\,d(z)$$

より，$d(x) = 1$ である．■

系 11.3 整式 $f(z)$，$g(z)$ は互いに素であるとする．このとき，$\deg h(z) < \deg f(z) + \deg g(z)$ をみたす任意の整式 $h(z)$ に対して，ある整式 $P(z)$，$Q(z)$ が存在して，

$$h(z) = P(z)\,f(z) + Q(z)\,g(z), \qquad \deg P(z) < \deg g(z), \qquad \deg Q(z) < \deg f(z)$$

が成り立つ．

（証明） 定理 11.2 より，整式 $\tilde{P}(z)$，$\tilde{Q}(z)$ が存在して，$1 = \tilde{P}(z)\,f(z) + \tilde{Q}(z)\,g(z)$ が成り立つ．$h(z)\,\tilde{P}(z)$ を $g(z)$ で割ったときの商を $\tilde{h}(z)$，余りを $P(z)$ とし，$h(z)\,\tilde{Q}(z)$ を $f(z)$ で割ったときの商を $\hat{h}(z)$，余りを $Q(z)$ とすると，$\deg P(z) < \deg g(z)$，$\deg Q(z) < \deg f(z)$ である．また，

$$\begin{aligned}
h(z) - (P(z)\,f(z) + Q(z)\,g(z)) &= h(z)\,\left(\tilde{P}(z)\,f(z) + \tilde{Q}(z)\,g(z)\right) - (P(z)\,f(z) + Q(z)\,g(z)) \\
&= \left(\tilde{h}(z)\,g(z) + P(z)\right)\,f(z) + \left(\hat{h}(z)\,f(z) + Q(z)\right)\,g(z) - (P(z)\,f(z) + Q(z)\,g(z)) \\
&= \left(\tilde{h}(z) + \hat{h}(z)\right)\,f(z)\,g(z)
\end{aligned}$$

より，左辺の次数は $\deg f(z) + \deg g(z)$ より小さいので，$\tilde{h}(z) + \hat{h}(z) = 0$ でなければならない．■

定理 11.4 整式 $f(z)$，$g_1(z)$，$g_2(z)$ は $\deg f(z) < \deg g_1(z) + \deg g_2(z)$ をみたし，$g_1(z)$ と $g_2(z)$ は互いに素であるとするとき，ある整式 $f_1(z)$，$f_2(z)$ が存在して，

$$\frac{f(z)}{g_1(z)\,g_2(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)} + \frac{f_2(z)}{g_2(z)}, \qquad \deg f_1(z) < \deg g_1(z), \qquad \deg f_2(z) < \deg g_2(z)$$

が成り立つ．

（証明） 系 11.3 より，ある整式 $f_1(x)$，$f_2(z)$ が存在して，

$$f(z) = f_1(z)\,g_2(z) + f_2(z)\,g_1(z), \qquad \deg f_1(z) < \deg g_1(z), \qquad \deg f_2(z) < \deg g_2(z)$$

が成り立つので，

$$\frac{f(z)}{g_1(z)\,g_2(z)} = \frac{f_1(z)\,g_2(z) + f_2(z)\,g_1(z)}{g_1(z)\,g_2(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)} + \frac{f_2(z)}{g_2(z)}$$

が得られる．■

11.3　部分分数分解

整式

$$(z-\gamma_k)^{p_k} \quad (k = 1, 2, \cdots, m), \qquad \left(z^2 - 2\,\mu_k\,z + \mu_k^2 + \nu_k^2\right)^{q_k} \quad (k = 1, 2, \cdot, \ell)$$

は互いに素であるから，定理 11.4 を帰納的に適用することにより，

$$\frac{R(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k(z)}{(z-\gamma_k)^{p_k}} + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{B_k(z)}{(z^2 - 2\,\mu_k\,z + \mu_k^2 + \nu_k^2)^{q_k}}$$

と表せる．ここで，各 k に対して，$A_k(z)$，$B_k(z)$ は整式であり，$\deg A_k(z) < p_k$，$\deg B_k(z) < 2\,q_k$ をみたす．各 k に対して，$A_k(z)$ および $B_k(z)$ をそれぞれ

$$(z-\gamma_k)\,, \qquad \left(z^2 - 2\,\mu_k\,z + \mu_k^2 + \nu_k^2\right)$$

で繰り返し割ることにより，

$$A_k(z) = \sum_{j=1}^{p_k} a_{kj}\,\left(z-\gamma_k\right)^{p_k - j}, \qquad B_k(z) = \sum_{j=1}^{q_k} (b_{kj}\,z + c_{kj})\,\left(z^2 - 2\,\mu_k\,z + \mu_k^2 + \nu_k^2\right)^{q_k - j}$$

と表せる．ここで，a_{kj}，b_{kj}，c_{kj} は適当な実数である．したがって，

$$f(z) = g(z) + \frac{R(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_k} \frac{a_{kj}}{(z-\gamma_k)^j} + \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{q_k} \frac{b_{kj}\,z + c_{kj}}{(z^2 - 2\,\mu_k\,z + \mu_k^2 + \nu_k^2)^j}$$

が得られる．このように，整式と複数の有理関数の和で表すことを**部分分数分解**という．

例題 11.5 有理関数 $\dfrac{3}{(z-1)(z+2)}$ を部分分数分解せよ．

(解)　$3=(z+2)-(z-1)$ より

$$\frac{3}{(z-1)(z+2)}=\frac{(z+2)-(z-1)}{(z-1)(z+2)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}$$

となる．■

例題 11.6 有理関数 $\dfrac{3}{z^3-1}$ を部分分数分解せよ．

(解)　$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$ より，定数 a，b，c を用いて

$$\frac{3}{z^3-1}=\frac{a}{z-1}+\frac{b\,z+c}{z^2+z+1}$$

と表されるので，恒等式

$$3=a\,(z^2+z+1)+(b\,z+c)\,(z-1)$$

が得られ，$a=1$，$b=-1$，$c=-2$ となる．したがって，

$$\frac{3}{z^3-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{z+2}{z^2+z+1}$$

である．■

例題 11.7 有理関数 $\dfrac{2\,(z-1)}{(z+1)^2\,(z^2+1)}$ を部分分数分解せよ．

(解)　実数 a，b，c，d を用いて

$$\frac{2\,(z-1)}{(z+1)^2\,(z^2+1)}=\frac{a}{z+1}+\frac{b}{(z+1)^2}+\frac{c\,z+d}{z^2+1}$$

と表されるので，恒等式

$$2\,(z-1)=a\,(z+1)\,(z^2+1)+b\,(z^2+1)+(c\,z+d)\,(z+1)^2$$

が得られる．z^3 の係数を比較すると $0=a+c$，つまり，$a=-c$ である．$z=i$ を代入すると，

$$2\,(i-1)=(c\,i+d)\,(i+1)^2=2\,i\,(c\,i+d)=-2\,c+2\,d\,i$$

より $c=1$，$d=1$ である．$z=-1$ を代入すると，

$$2\,\{(-1)-1\}=b\,\{(-1)^2+1\}=2\,b$$

より $b=-2$ である．したがって，

$$\frac{2\,(z-1)}{(z+1)^2\,(z^2+1)}=-\frac{1}{z+1}-\frac{2}{(z+1)^2}+\frac{z+1}{z^2+1}$$

である．■

第 12 章

等差数列・等比数列

12.1　数列とは

数列は，数を順番に並べたものである．例えば，

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \tag{12.1}$$

や

$$3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 9,\ 2,\ 6,\ 5,\ 3,\ 5,\ \cdots \tag{12.2}$$

は数列である．数列のなかで，(12.1) のように，数列の要素が有限個であるものを**有限数列**，(12.2) のように，数列の要素が無限個であるものを**無限数列**という．n 番目の数は，a_n のように表されることが多く，**第 n 項**という．また，第 1 項を**初項**，有限数列の最後の項を**末項**といい，第 n 項を n に関する式で表現したものを**一般項**という．数列全体を表すときには，$\{\,a_n\,\}$ または $(\,a_n\,)$ のように表す．このため，括弧があるときは数列全体を，括弧がないときは第 n 項を表していることに注意したい．

12.2　等差数列

例えば，

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots$$

のように，隣り合った 2 つの項の差が常に一定であるような数列を**等差数列**といい，その一定の差を**公差**という．等差数列 $\{\,a_n\,\}$ は，初項 a と公差 d が与えられていれば，

$$a_1 = a, \qquad a_2 = a + d, \qquad a_3 = a + 2\,d, \qquad a_4 = a + 3\,d, \qquad \cdots$$

となるので，一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)\,d \tag{12.3}$$

と表せる．

12.3　等差数列の和

初項が a，公差が d の等差数列において，初項から第 n 項までの和を S とする．第 n 項の値を ℓ とすると，$\ell = a + (n-1)\,d$ である．

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S & = & a & + & (a+d) & + & (a+2\,d) & + & \cdots & + & (\ell-d) & + & \ell \\ S & = & \ell & + & (\ell-d) & + & (\ell-2\,d) & + & \cdots & + & (a+d) & + & a \end{array}$$

の両辺の和をとると，$2S = n\,(a+\ell)$ となる．したがって，

$$S = \frac{n\,(a+\ell)}{2} = \frac{n\,\{2\,a+(n-1)\,d\}}{2}$$

と表せる．上記の和を適用することにより，自然数の和および奇数の和に関して，次の関係式が得られる．

(1) $1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$

(2) $1+3+5+\cdots+(2\,n-3)+(2\,n-1) = n^2$

12.4　等比数列

例えば，

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \cdots$$

のように，隣り合った 2 つの項の比が常に一定であるような数列を**等比数列**といい，その一定の比を**公比**という．等比数列 $\{a_n\}$ は，初項 a と公比 r が与えられていれば，

$$a_1 = a, \qquad a_2 = a\,r, \qquad a_3 = a\,r^2, \qquad a_4 = a\,r^3, \qquad \cdots$$

となるので，一般項 a_n は

$$a_n = a\,r^{n-1}$$

と表せる．

12.5　等比数列の和

初項が a，公比が r の等比数列において，初項から第 n 項までの和を S とする．このとき，第 n 項は $a\,r^{n-1}$ である．

$$\begin{aligned} S + a\,r^n =& a + a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-1} + a\,r^n \\ =& a + r\,\left(a + a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-1}\right) = a + r\,S \end{aligned}$$

より，$(1-r)\,S = a - a\,r^n$ となる．したがって，

$$r \neq 1 \text{ のとき} \qquad S = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r}$$

である．$r = 1$ のときには S は n 個の a の和であるから，

$$r = 1 \text{ のとき} \qquad S = n\,a$$

である．

例題 12.1 第 2 項が 3，第 5 項が -3 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ．また，この数列の一般項を求めよ．

(解)　等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，(12.3) より $a_n = a + (n-1)\,d$ と表せる．$a_2 = 3$，$a_5 = -3$ より，

$$a + d = 3, \qquad a + 4\,d = -3$$

となり，この連立方程式を解くと，$a = 5$，$d = -2$ である．したがって，一般項は $a_n = 5 + (n-1)\cdot(-2) = 7 - 2\,n$ である．■

例題 12.2 1 から 500 までの自然数について，3 の倍数の和を求めよ．

(解)　1 から 500 までの自然数で，3 の倍数の数の個数は 166 個であるから，

$$3+6+9+\cdots+495+498=\frac{166\cdot(3+498)}{2}=41583$$

である．■

例題 12.3 数列 f，g，h が等差数列であるための必要十分条件は $2\,g=f+h$ である[*1]ことを示せ．

(解)　等差数列は隣り合った 2 つの項の差が常に一定であるような数列であるから，

$$\text{数列 } f,\ g,\ h \text{ が等差数列である} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g-f=h-g \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\,g=f+h$$

となる．■

例題 12.4 自然数 n に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$$

(解)　恒等式

$$(k+1)^3-k^3=3\,k^2+3\,k+1$$

の各辺の k に関する 1 から n までの和は

$$\begin{aligned}
(\text{左辺の和}) &= \left(2^3-1^3\right)+\left(3^3-2^3\right)+\left(4^3-3^3\right)+\cdots+\left\{(n+1)^3-n^3\right\}\\
&=(n+1)^3-1=n\,\left(n^2+3\,n+3\right),\\
(\text{右辺の和}) &= \left(3\cdot1^2+3\cdot1+1\right)+\left(3\cdot2^2+3\cdot2+1\right)\\
&\quad+\left(3\cdot3^2+3\cdot3+1\right)+\cdots+\left(3\,n^2+3\,n+1\right)\\
&=3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)+3\cdot(1+2+3+\cdots+n)+n\cdot1\\
&=3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)+3\cdot\frac{n\,(n+1)}{2}+n\\
&=3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)+\frac{n\,(3\,n+5)}{2}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &=\frac{1}{3}\left\{n\,\left(n^2+3\,n+3\right)-\frac{n\,(3\,n+5)}{2}\right\}\\
&=\frac{n\,\left(2\,n^2+3\,n+1\right)}{6}=\frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}
\end{aligned}$$

となる．■

例題 12.5 2 つの等差数列 2，9，16，$\cdots$ と 10，20，30，$\cdots$ がある．この 2 つの数列の共通な項を順に並べてできる数列の一般項を求めよ．

(解)　等差数列 2，9，16，$\cdots$ の一般項を a_n とすると，$a_n=7\,n-5$ である．共通な項となるのは a_n が 10 の整数倍になるとき，つまり，自然数 ℓ を用いて $7\,n-5=10\,\ell$ と表せるときである．$7\,n=5\,(2\,\ell+1)$ より，n は 5 の

[*1] 等差数列 $\{\,a_n\,\}$ において，すべての自然数 n に対して $2\,a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ が成り立ち，これを**等差中項**という．また，等比数列 $\{\,a_n\,\}$ において，すべての自然数 n に対して $a_{n+1}^2=a_n\,a_{n+2}$ が成り立ち，これを**等比中項**という．

倍数であるから，自然数 m を用いて $n = 5m$ と表せる．$7m = 2n + 1$ より，m は奇数であるから，自然数 k を用いて $m = 2k - 1$ と表せ，$n = 10k - 5$ でなければならない．逆に，自然数 k に対して $n = 10k - 5$ と表されるとき，$a_n = 10\,(7k - 4)$ となり，a_n は 10 の整数倍である．したがって，共通な項を並べてできる数列の一般項は $10\,(7n - 4)$ である．■

例題 12.6 異なる 3 つの実数 a，b，c がこの順で等差数列をなし，a，c，b の順で等比数列をなす．さらに，$a\,b\,c = 27$ であるとき，a，b，c の値を求めよ．

(解)　a，b，c の順で等差数列をなすので，等差中項より $2b = a + c$ である．また，a，c，b の順で等比数列をなすので，等比中項より $c^2 = a\,b$ である．$27 = a\,b\,c = c^3$ であることと，c は実数であることから，$c = 3$ となる．$a \neq c = 3$ と

$$0 = 2\left(a\,b - c^2\right) = a\,(a - 3) - 18 = (a + 6)\,(a - 3)$$

より $a = -6$ であり，$b = \dfrac{a + c}{2} = -\dfrac{3}{2}$ となる．したがって，

$$a = -6, \qquad b = -\frac{3}{2}, \qquad c = 3$$

である．■

例題 12.7 △ABC の 3 辺 BC，CA，AB の長さがこの順で等比数列をなすとき，$\angle B$ の最大値を求めよ．

(解)　公比を r とし，$a = \mathrm{BC}$ とすると，$r > 0$，$\mathrm{CA} = a\,r$，$\mathrm{AB} = a\,r^2$ である．余弦定理より，

$$\cos\angle B = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{CA}^2}{2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC}} = \frac{r^4 + 1 - r^2}{2\,r^2} = \frac{\left(r^2 - 1\right)^2 + r^2}{2\,r^2} \geq \frac{1}{2}$$

となり，等号が成り立つのは $r = 1$ のときである．$\cos\theta$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲では単調減少であるから，$r = 1$（△ABC が正三角形）のとき，$\angle B$ の値は最大となり，その値は $\dfrac{\pi}{3}$ である．■

第 13 章

いろいろな数列

13.1　和の記号 $\sum$

例えば，数列 $\{a_n\}$ と自然数 n が与えられたとき，「数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ」という問題を考えよう．例えば，初項から第 10 項までの和を

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

と書くことはできるが，第 100 項までとなると大変である．このようなときには，**シグマ記号**を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_k$ と表すとよい．シグマ記号を用いた表現方法は

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

である．また，$\displaystyle\sum_{j=m}^{n} a_j$ のように，k の代わりに別の変数を用いてもよいことに注意したい．

13.2　$\sum$ の性質

(1) 定数 c に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = n\,c$ が成り立つ．

(2) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ が成り立つ．

(3) 定数 c と数列 $\{a_n\}$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(c\,a_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ が成り立つ．

13.3　階差数列

数列 $\{a_n\}$ が与えられているとき，隣り合う 2 項の差 $b_n = a_{n+1} - a_n$ を項とする数列 $\{b_n\}$ を $\{a_n\}$ の**階差数列**という．$n \geq 2$ のとき，

$$\begin{array}{ccccc}
a_2 & - & a_1 & = & b_1 \\
a_3 & - & a_2 & = & b_2 \\
a_4 & - & a_3 & = & b_3 \\
 & & & \vdots & \\
a_{n-1} & - & a_{n-2} & = & b_{n-2} \\
a_n & - & a_{n-1} & = & b_{n-1}
\end{array}$$

の両辺の和を取ることにより，

$$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

が得られる．この関係式では $n = 1$ の場合は求めることができていないため，$n = 1$ の場合に成り立つかどうかを確認する必要がある．

13.4　調和数列

数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{11},\ \cdots$$

は，各項の逆数が 2，5，8，11，$\cdots$ という等差数列になっている．このように，数列 $\{a_n\}$ の各項の逆数をとってできる数列が等差数列になるとき，もとの数列 $\{a_n\}$ を**調和数列**という．

例題 13.1 次の和を求めよ．

$$S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2\,n-1)^2$$

(解)　自然数の和および自然数の 2 乗和に関する公式

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$$

を用いて，

$$\begin{aligned} S =& \sum_{k=1}^{n} (2\,k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(4\,k^2 - 4\,k + 1\right) = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ =& 4 \cdot \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6} - 4 \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} + n = \frac{n\,(2\,n+1)\,(2\,n-1)}{3} \end{aligned}$$

となる．■

例題 13.2 $r \neq 1$ とするとき，次の和を求めよ．

$$S = 1 + 2\,r + 3\,r^2 + 4\,r^3 + \cdots + n\,r^{n-1}$$

(解)

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2\,r & + & 3\,r^2 & + & 4\,r^3 & + & \cdots & + & & & n\,r^{n-1} & & \\ r\,S & = & & & r & + & 2\,r^2 & + & 3\,r^3 & + & \cdots & + & (n-1)\,r^{n-1} & + & n\,r^n & & \end{array}$$

の両辺を引き算すると，

$$\begin{aligned} (1-r)\,S =& 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} - n\,r^n \\ =& \frac{1-r^n}{1-r} - n\,r^n = \frac{1-(n+1)\,r^n + n\,r^{n+1}}{1-r} \end{aligned}$$

となり，

$$S = \frac{1-(n+1)\,r^n + n\,r^{n+1}}{(1-r)^2}$$

である．■

例題 13.3 次の和 S を求めよ．

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)}$$

（解）　恒等式

$$\frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

を用いて，

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

となる．■

例題 13.4 次の数列の一般項 a_n を求めよ．

$$1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \cdots$$

（解）　階差数列 $\{\,b_n\,\}$ は

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

となるので，$b_n = n-1$ である．$n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k-1) = 1 + \frac{(n-1)\ \{0 + (n-2)\}}{2} = \frac{n^2 - 3\,n + 4}{2}$$

である．

$$\frac{1^2 - 3\cdot 1 + 4}{2} = 1$$

より $n = 1$ のときも成り立つので，一般項 a_n は

$$a_n = \frac{n^2 - 3\,n + 4}{2}$$

である．■

例題 13.5 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = (n+1)^2$ で与えられる数列 $\{\,a_n\,\}$ の一般項を求めよ．

（解）　$a_1 = S_1$ であり，$n \geq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$ であることに注意すると，$a_1 = (1+1)^2 = 4$ であり，$n \geq 2$ のとき $a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2\,n + 1$ である．■

例題 13.6 P_k　($k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$) を

$$P_k = \begin{cases} 2^{-k} & (k < n), \\ 2^{1-n} & (k = n) \end{cases}$$

で定めるとき，$-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_k \log_2 P_k$ を求めよ．

（解）　$k < n$ と $k = n$ では P_k の定め方が異なることに注意すると，

$$-\sum_{k=1}^{n} P_k \log_2 P_k = -\sum_{k=1}^{n-1} P_k \log_2 P_k - P_n \log_2 P_n = \sum_{k=1}^{n-1} k\, 2^{-k} + (n-1)\ 2^{1-n}$$

である．例題 13.2 より，上式の右辺の第 1 項は

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\, 2^{-k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k\ \left(2^{-1}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1 - n\ \left(2^{-1}\right)^{n-1} + (n-1)\ \left(2^{-1}\right)^{n}}{\left(1 - 2^{-1}\right)^2} = 2 - (n+1)\ 2^{1-n}$$

であるから，

$$-\sum_{k=1}^{n} P_k \log_2 P_k = \left\{2-(n+1)\ 2^{1-n}\right\}+(n-1)\ 2^{1-n} = 2-2^{2-n}$$

となる．■

例題 13.7 自然数 n が $n=2^m\ (2\ell+1)$ （m，ℓ は整数で，$m \geq 0$，$\ell \geq 1$）と表されるならば，n は連続した 2 個以上の自然数の和として表されることを示せ．

(解)　n が自然数 p から q までの和

$$n=\frac{(q-p+1)\ (p+q)}{2}$$

と表されるとする．このとき，$q-p+1 \geq 2$ である．

(1) $p+q=2^{m+1}$，$q-p+1=2\ell+1$ であれば，$n=2^m\ (2\ell+1)$ と表せるので，連立方程式を解くと，$p=2^m-\ell$，$q=2^m+\ell$ である．
(2) $p+q=2\ell+1$, $q-p+1=2^{m+1}$ であれば, $n=2^m\ (2\ell+1)$ と表せるので, 連立方程式を解くと, $p=\ell-2^m+1$, $q=2^m+\ell$ である．

したがって，n は

(1) $2^m>\ell$ のときには $2^m-\ell$ から $2^m+\ell$ までの自然数の和として，
(2) $2^m \leq \ell$ のときには $\ell-2^m+1$ から $2^m+\ell$ までの自然数の和として

表せる．■

第 14 章

漸化式

14.1 漸化式とは

例えば，初項が 2，公差が 3 の等差数列 $\{a_n\}$ は，条件

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定めることができる．これは，初項と隣り合う 2 項間の関係がわかれば，数列のすべての項を決定できることを意味しており，このような数列の項の間に常に成り立つ関係式を**漸化式**という．定義から，漸化式は

[タイプ 1]　等差数列 $\{a_n\}$ については，公差 d を用いて $a_{n+1} = a_n + d$ の形，

[タイプ 2]　等比数列 $\{a_n\}$ については，公比 r を用いて $a_{n+1} = r\,a_n$ の形

をしている．また，

[タイプ 3]　数列 $\{a_n\}$ は，その階差数列 $\{b_n\}$ を用いて，$n \geqq 2$ のとき $a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

と表現できる．これらをうまく利用すると，漸化式で与えられた数列の一般項を求めることができる場合がある．

14.2 漸化式で定められる数列の一般項

p，q を実数とし，p は $p \neq 0$，$p \neq 1$ をみたすとする．漸化式

[タイプ 4]
$$a_{n+1} = p\,a_n + q \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう．$\{a_n\}$ の極限値[*1]を x と考えて，漸化式の a_{n+1} と a_n を x で置き換えることにより，n を含まない方程式 $x = p\,x + q$ が得られる．この方程式は**特性方程式**と呼ばれている．特性方程式の解を c とすると，$c = p\,c + q$ より

$$a_{n+1} - c = (p\,a_n + q) - (p\,c + q) = p\,(a_n - c)$$

となり，数列 $\{a_n - c\}$ は公比 p の等比数列である．

$$a_n - c = p^{n-1}\,(a_1 - c) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n = c + p^{n-1}\,(a_1 - c)$$

より，タイプ 4 の漸化式で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は求めることができる．

[*1] 数列 $\{a_n\}$ において，n が限りなく大きくなるとき a_n の値が一定の値 a に限りなく近づくならば，$\{a_n\}$ は**極限値** a **に収束する**という．

定数 p がさらに $p \neq q$ もみたすとし，漸化式

$$a_{n+1} = p\,a_n + q^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定まる数列 $\{\,a_n\,\}$ の一般項を求めよう．タイプ 4 のように方程式を作ると，$x = p\,x + q^n$ となり，n が含まれる方程式なる．このため，タイプ 4 のような解法は直ぐには使えないので，別の方法で一般項を求めることになる．そこで，漸化式の両辺を p^{n+1} で割り，$b_n = \dfrac{a_n}{p^n}$ とおくと，

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{q^n}{p^{n+1}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

となり，数列 $\{\,b_n\,\}$ はタイプ 3 の漸化式とみなせる．$n \geq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n\right\} = \frac{a_1}{p} + \frac{q}{p^2}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{q}{p}} = \frac{a_1}{p} + \frac{q\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right)}{p^n\,(p-q)}$$

である．この求め方は，タイプ 4 の漸化式にも適用できることに注意したい．

上記の漸化式とその一般項の求め方から分かるように，それぞれの漸化式に適した解法があるので，様々なタイプの漸化式に接して，その解法に慣れておく必要がある．

例題 14.1 次の条件で定まる数列 $\{\,a_n\,\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = a_n + 2\,n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(解)　数列 $\{\,a_n\,\}$ の階差数列 $\{\,b_n\,\}$ の一般項は $b_n = 2\,n$ と表される．$\{\,a_n\,\}$ をタイプ 3 とみなすと，$n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2\,k = 2 + 2\cdot\frac{n\,(n-1)}{2} = n^2 - n + 2$$

となる．$1^2 - 1 + 2 = 2$ より $n = 1$ のときも成り立つ．したがって，一般項は $a_n = n^2 - n + 2$ である．■

例題 14.2 次の条件で定まる数列 $\{\,a_n\,\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = 2\,a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(解)　特性方程式は $x = 2\,x + 3$ であり，その解は -3 である．漸化式の両辺から -3 を引くと，

$$a_{n+1} + 3 = a_{n+1} - (-3) = (2\,a_n + 3) - (-3) = 2\,(a_n + 3)$$

となる．ここで，$b_n = a_n + 3$ とおくと，

$$b_1 = 3, \qquad b_{n+1} = 2\,b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

より，数列 $\{\,b_n\,\}$ は初項 3，公比 2 の等比数列である．したがって，$b_n = 3\cdot 2^{n-1}$ と表されるので，$a_n = 3\cdot 2^{n-1} - 3$ である．■

例題 14.3（［タイプ 5］） 次の条件で定まる数列 $\{\,a_n\,\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = (n+1)\,a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(解)　いくつかの項を実際に計算すると，

$$a_1 = 1 = 1!, \qquad a_2 = 2\,a_1 = 2\cdot 1! = 2!, \qquad a_3 = 3\,a_2 = 3\cdot 2! = 3!, \qquad \cdots$$

となり，$a_n = n!$ と推測できるので，これを数学的帰納法で証明する．

[1] $n=1$ のときは明らかに推測は正しい．

[2] $n=k$ のとき推測は正しいとすると，

$$a_{k+1}=(k+1)\,a_k=(k+1)\,k!=(k+1)!$$

となり，$n=k+1$ のときも推測は正しい．

数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $a_n=n!$ である．■

例題 14.4（［タイプ6］） 次の条件で定まる数列 $\{\,a_n\,\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1=4,\qquad a_{n+1}=\frac{4\,a_n-2}{a_n+1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

（解） 数列 $\{\,a_n\,\}$ に対する特性方程式 $x=\dfrac{4\,x-2}{x+1}$ の解は $x=1$ および $x=2$ であり，それらを漸化式の両辺からひくと，

$$\begin{aligned}a_{n+1}-1=&\frac{4\,a_n-2}{a_n+1}-1=\frac{3\,(a_n-1)}{a_n+1},\\ a_{n+1}-2=&\frac{4\,a_n-2}{a_n+1}-2=\frac{2\,(a_n-2)}{a_n+1}\end{aligned}$$

と変形できる．

$$b_n=\frac{a_n-1}{a_n-2}$$

とおくと，数列 $\{\,b_n\,\}$ は

$$b_1=\frac{3}{2},\qquad b_{n+1}=\frac{3}{2}\,b_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

をみたし，タイプ２である．

$$\frac{a_n-1}{a_n-2}=b_n=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

より，

$$a_n=\frac{2\cdot 3^n-2^n}{3^n-2^n}$$

となる．■

例題 14.5（［タイプ7］） 次の条件で定まる数列 $\{\,a_n\,\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1=4,\qquad a_{n+1}=\frac{3\,a_n-1}{a_n+1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

（解） 数列 $\{\,a_n\,\}$ に対する特性方程式 $x=\dfrac{3\,x-1}{x+1}$ の解は $x=1$（重解）であり，それを漸化式の両辺からひくと，

$$a_{n+1}-1=\frac{3\,a_n-1}{a_n+1}-1=\frac{2\,(a_n-1)}{a_n+1}=\frac{2\,(a_n-1)}{(a_n-1)+2}$$

が得られる．

$$b_n=\frac{1}{a_n-1}$$

とおくと，

$$b_1=\frac{1}{3},\qquad b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

となり，数列 $\{b_n\}$ はタイプ 1 である．

$$\frac{1}{a_n - 1} = b_n = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3n-1}{6}$$

であるから，

$$a_n = \frac{3n+5}{3n-1}$$

である．■