愛媛大学教育学部紀要　第54巻　第１号　91～102　2007

最短連結問題に関する数学授業の実践報告

― NP-困難問題の教材化への試み ―

（教育学部数学教育研究室）　吉　村　直　道
（教育学部数学教育研究室）　河　村　泰　之

A Report of the Mathematics Class about Minimum Steiner Tree

― An Attempt to Use NP-Hard Problems for Teachig Materials ―

Naomichi YOSHIMURA *and* Yasuyuki KAWAMURA

（平成19年6月8日受理）

1．はじめに ― 授業実践の背景と本稿のねらい ―

文部科学省は2002年度，科学技術，理科・数学教育を重点的に行う高等学校をスーパーサイエンスハイスクール（S.S.H.）として指定し，将来有為な科学技術系人材の育成に資する事業を開始した。ここでは，①学習指導要領によらない教育課程の編成実施等による高等学校における理科・数学に重点を置いたカリキュラムの開発，②大学や研究機関等との連携方策の研究，③論理的思考力，創造性や独創性等を一層高めるための指導方法等の研究が柱となっている[1），2)]。

本稿で記述している広島大学附属中・高等学校も2003年にそのS.S.H.の指定を受けており，報告する授業実践は，その第３年次事業において取り組んだ高校生対象の授業を，中学生用に改善し実践したものである。当然，一般の高校生にも実践できるものである。

近年，高校生にとどまらず，中学生においても論理的思考力は低下していると言われ，中学校段階から論理的思考力・創造力を育む数学指導が求められている[1)]。

また，平成11年改訂の学習指導要領においても「創造性の基礎を培う」ことが数学教育の一つの目標に挙げられており［3)］，これからの数学教育において創造性の育成は重要な目標となると考えられる。

その点から，学習指導要領によらない教材で，論理的思考力や創造性を一層高める一つの指導事例を紹介し，教育財産として蓄積することは有意義であると考える。さらに，今後の研究題材として利用されることを期待して，ここに昨年度行った授業を整理し報告する。

また最後に，この事例をもとに現在研究中である数学の題材を教材とする際の留意点を整理し示す。

2.　現在研究中である数学分野の教材化の意義

創造性の育成のためには「多面的にものを見る力」や「論理的に考える力」といったものが必要となってくるであろう。そして，それらの力を発揮し錬磨していくことができるのは，学習者が意欲的・積極的に数学的議論を展開し，主体的に新たな問題を構想する過程においてより強力になされると考えている。

後述する授業実践は，NP-困難問題（NP：nondeterministic polynomial）を扱ったものであり，まさにその一つの事例になり得るものと考える。

NP-困難問題というのは，ある数学的モデルをコンピュータを利用しても解くのに膨大な計算時間を必要とするため，現実的には，高速に高品質の近似解を求めることにその実用性を追求する研究対象である[4)]。そして，「この“コンピュータで手に負えない問題群”は，現代の数学やコンピューターサイエンスの分野において，もっとも活発に研究されている分野の１つである。多くの問題はそれが真に手に負えない問題なのかどうかさえわかっていない」[4)，p.152]と言われている。そして，その代表的な問題の一つが，第3.節の「最短連結問題」である。

このNP-困難問題はまさに現在研究中の数学分野の一つであり，その点からも生徒たちは興味・関心を喚起しやすく，躍動的な授業展開が期待できる。このような分野の存在を知り，限界はあるものの，その数学的考察に

取り組むことは，将来，大学や研究機関においてより高度な数学研究に進む際の素地となり，その導入の大きな役割を果たすと期待される。

また，その問題解決の過程には，さまざまな課題が登場し，筋道を立てた論理的かつ多角的な考察が必要となってくる。創造性の育成に十分貢献できる題材である。

しかし，NP-困難問題ゆえに課題も存在し，早い段階で，問題の複雑さ，解決の困難性に直面する。この事実が，これまでの生徒たちの数学は完成された静的で固定的なものと捉える数学観を打破し，数学がまさに発達中の動的なものであり，チャレンジする可能性を秘めたものと捉える機会を与えてくれると期待している。

3. 最短連結問題

3.1. 最短連結問題（Steiner Tree Problem）

n個の都市に，どの2つの都市も往来可能となるように高速道路を設計したい。ただし，高速道路の総計距離を最小にしたい。このとき，高速道路をどのように設計(連結)すればよいか。

このような問題は，一般に最短ネットワーク問題あるいはシュタイナー問題と呼ばれる[4)]。本稿では，生徒にも分かりやすいように，この問題を最短連結問題と呼ぶことにする。このような連結を考える問題には，与えられた点集合に新たな点を付加してもよいとする問題と，そうでない問題の２種類の異なるタイプのものがある[4)]。本稿では，連結の点を新たに加えてもよいとし，前者の最短の連結の仕方を考えていく。

与えられた点集合に対して最短の連結の仕方を見つけることは容易ではない。特に与えられた点が４つ以上になってくると，局所的に最短な連結ではあるが，全体として最短とは言えない連結がいくつか決まり，その中からその距離を比較評価して最短の連結を求めることになる。点の個数によってはそうした最短連結の候補の連結は多数あり，とても人間の思考操作においてその長さの評価をするのは困難となる。

それ故，コンピュータが導入され，なるべく誤差の少ない範囲での実用的な最短連結を生み出すアルゴリズムの生成に数学者や情報科学の研究者たちは挑戦している。そして，現在では，一般にn個の点において，あるアルゴリズムで連結をすれば，最短の連結の距離総和に対するその連結の距離総和の比が$2/\sqrt{3}$つまり約1.15にまでおさえられると予想されており，n＝６の場合まではこの予想が成り立つと確かめられている[4)]。

まさに，現在も研究中の問題であり，一般のn個の点における最短連結の生成のアルゴリズムは見つけられていない。

3.2. Steiner point と Steiner tree

この最短連結問題をまず数学的に明らかにする。

平面上にn個の点があったとき，そのどの点も孤立することなく連結する。いろいろな連結が考えられるが，

連結の線分の長さの総和が最小のものを構成する場合，その連結の仕方に閉路は存在しない。

なぜならば，もし最短連結において閉路が存在したとすると，閉路上の任意の１辺を取り除いても，このネットワークは連結されており，線分の長さの総和においてより小さな値を持つ連結を構成することができ，最短の連結であることに反する。よって，最短の連結は閉路を持たないことが分かる。

また，n≧３において，最短連結を，初めに与えられた点のみによる連結ではなく，新たにいくつかの点を付加して連結を考える中に最短連結を見つけることができることがある。その新たに付加した点を一般にSteiner point と呼び，Steiner point等によって構成されたもので連結線分の長さの総和が局所的に小さい連結をここではSteiner treeと呼ぶ。Steiner treeの中で最も小さな連結の線分の総和を持つものが最短連結(Minimum Steriner Tree)である。

まず，平面上に任意に3点A，B，Cが与えられたときの最短連結について考える。

このとき，一般に次の定理が成り立つ。

定理１： （ア） △ABCのどの内角も120°未満のとき， △ABCの内部に存在し各頂点を等角，すなわち120°に見込む点をSteiner pointとして選び，その

Steiner pointと各頂点を連結するSteiner treeをつくると，その連結が最短連結となる（図１）。
（イ）　△ABCのある内角が120°以上のときは，最長辺を除いた他の２辺の連結が最短連結となる（図２）。

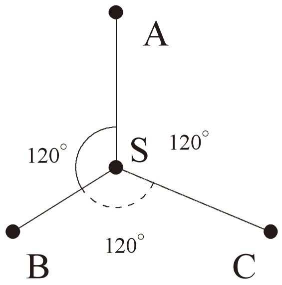


図１

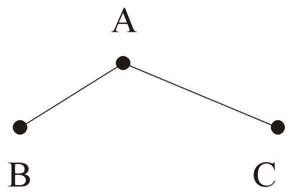


図２

これを証明するには，まず次の補題を証明しなければならない。

補題（Vivianiの定理）：正三角形の内部，またはその周上の任意点Pから3辺に垂線を下ろすと，各垂線の長さの和は点Pのとり方によらず一定で正三角形の高さに等しい。

これは，点Pと正三角形の３頂点を結び，正三角形を３つ，もしくは２つに三角形分割し，分割してできた三角形の面積和が元の正三角形の面積となることから証明することができる。

この補題を利用した定理１の証明は次の通りである。

【定理１（ア）の証明】

△ABCの内部にあって3頂点を見込む角の大きさがどれも120゜となる点をPとする。点Pとは異なり，３頂点を除く△ABCの内部およびその周上の任意な点Qをとる。そして，線分PA，PB，PCのそれぞれに直交し，点A，B，Cを通る直線の交点をX，Y，Zとする（図３）。

このとき，円に内接する四角形の性質より，

$$\angle X=\angle Y=\angle Z=60^\circ$$

となり，△XYZは正三角形である。

ここで，点Qから正三角形XYZの３辺XY，YZ，ZXへそれぞれ垂線をひき，その交点をそれぞれ点A'，B'，C'とすると，補題より

$$QA'+QB'+QC'=PA+PB+PC$$

となる。

ところで，△QAA' は直角三角形であるから，

$$QA>QA'$$

同様に，　$QB>QB'$，$QC>QC'$

が成り立つので，

$$QA+QB+QC>QA'+QB'+QC'=PA+PB+PC$$

を得る。

また，点Aの位置に点Qをとってみても，

$$AB+AC>QB'+QC'=PA+PB+PC$$

が成り立ち，これは点B，Cの位置に点Qがあっても同様である。

したがって，三角形の２辺からなる連結よりも，この点PをSteiner pointとして３頂点を連結した場合が求める最短連結となることが分かる。

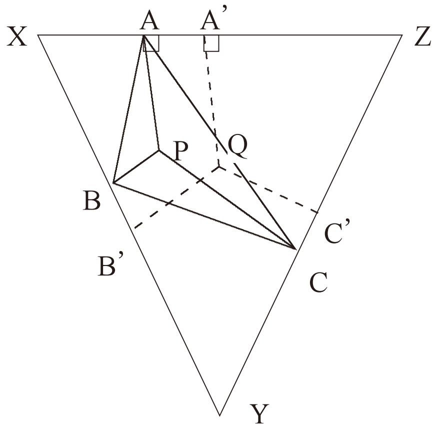


図３

【定理１（イ）の証明】

（a）　∠A＝120゜のとき：

辺AB，ACと点B，Cでそれぞれ直交する２辺をもち，他の１辺が点Aを通る正三角形を考える。

このとき，△ABCの内部またはその周上に任意点Qをとると，前述の（ア）と同様の考察により，

$$QA+QB+QC>QA'+QB'+QC'=AB+AC$$

が成り立ち，△ABCの内部または周上にどんなSteiner pointを考えても，連結AB＋ACがこの場合における最短連結になることが分かる。

（b）　∠A＞120゜のとき：

AB＋AC＞SA＋SB＋SCとなるようなSteiner

pointである点Sが存在すると仮定する。

もし，SC＞ACとすると，

SA＋SB＋SC＞SA＋SB＋AC

SA＋SB＞ABより，

SA＋SB＋AC＞AB＋AC

よって，　SA＋SB＋SC＞AB＋AC

となり，仮定に矛盾する。

よって，　SC≦AC　………　①

同様に，　SB≦AB　………　②

①，②より，点Sは，点Bを中心とする半径ABの円と点Cを中心とする半径ACの円の共通部分で，△ABCの内部に存在することが分かる。

ここで，∠CAP＝120°となるように点Rを辺BC上にとると，点Sは△ARCの内部にある。

辺SBと辺ARとの交点Qとすると，△AQCにおいて，∠A＝120°であり，

SA＋SQ＋SC＞AQ＋AC

よって，

SA＋SB＋SC＝SA＋SQ＋QB＋SC

＞QB＋AQ＋AC＞AB＋AC

が成り立つが，これは仮定に反する。

よって，この場合，Steiner treeを生成するSteiner pointは存在せず，頂点Aを結ぶ2辺からなる連結が最短連結となる。

以上が，定理１の証明であるが，この証明は，３点連結におけるSteiner pointの一意性については何も言及していない。つまり，次の定理を証明しなければ，△ABCのどの内角も120°未満である３点連結において，３頂点を120°で見込むこの内部点以外に，最短連結を構成する連結の仕方はないと言えない。

> 定理２：3点A，B，Cに対する最短連結において，Steiner pointは△ABCの内部にたかだか1つしか存在しない。

【定理２の証明】

Steiner pointが△ABCの内部にあることは自明。

今，Steiner pointが三角形の内部に m個(m≧2)存在すると仮定する。

このとき，Steiner pointの次数(その点から生成されている線分の本数)はその性質から３以上であるので，treeの性質より，

2×(最短連結の辺の数)

≧(点Aの次数)＋(点Bの次数)＋(点Cの次数)

＋(すべてのSteiner pointの次数の和)

が成り立つので，

$$2(3+m-1)\geqq 3+3m$$

$$\therefore\ m\leqq 1$$

定理１，定理２より，3点集合の配置における最短連結は一意に決まることが分かる。

3.3.　4点集合の配置におけるSteiner tree

4点集合の配置におけるSteiner treeは，次のような定理に基づいたアルゴリズムによって得られる。

> 定理３：３点A，B，C(ただし△ABCのどの内角も120°未満とする)に対して，線分ABを１辺とする正三角形ABTを線分ABに対して点Cの反対側につくり，△ABCにおける3頂点を見込む角がすべて120°となるような内部点Sとしたとき，次の３つが成り立つ。
>
> （ア）　点Sは△ATBの外接円上にある。
>
> （イ）　３点T，S，Cは同一直線上にある。
>
> （ウ）　TS＝AS＋BS

【定理３の証明】

(ア)，(イ)は省略。

(ウ)　トレミーの定理より，次が成り立つ。

AT×BS＋TB×AS＝AB×TS

また，正三角形より，AT＝TB＝ABだから，

∴　AS＋BS＝TS

この定理３より，３点配置におけるSteiner treeは，２点A，Bを定理３の点T(点A，Bの代替点と呼ぶ)で置き換えることにより，△ATBの外接円と直線TCとの交点をSteiner pointとして選び，連結していけばよいことが分かる。

例えば，縦の辺の長さが２，横の辺の長さが3の長方

形の配置に４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄがあったとする。

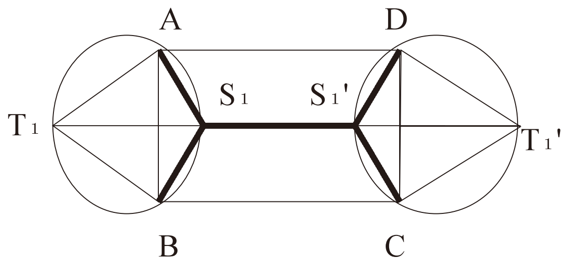


図４

一つのSteiner treeを構成するために，まず点Ａ，Ｂの代替点T_1と，点Ｃ，Ｄの代替点T_1'をとる。次に，Steiner pointとして，直線T_1T_1'と△AT_1Bの外接円との交点を点S_1，直線T_1T_1'と△CT_1'Ｄの外接円との交点を点S_1'とする。それらのSteiner pointと元の４点を連結すれば，この４点における一つのSteiner treeを構成することができる。

このときの連結の総長は線分T_1T_1'の長さで表され，その値は$3+2\sqrt{3}\fallingdotseq 6.46$である。

また，この4点配置における別のSteiner treeも構成することができる(図５)。

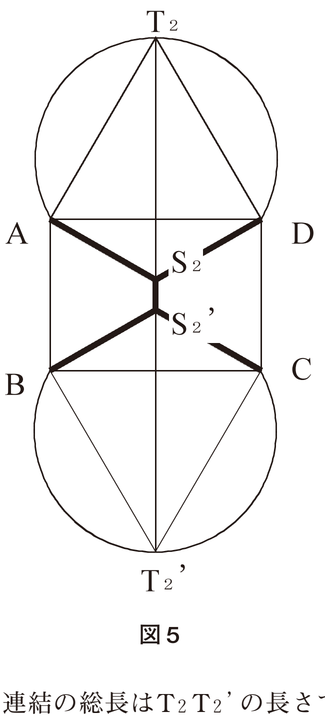


図５

このときの連結の総長はT_2T_2'の長さで表され，その値は$2+3\sqrt{3}\fallingdotseq 7.19$であり，この4点連結における最短連結は図４の連結となる。

このように，長方形に配置される４点集合に対するSteiner treeは，このアルゴリズムにより２種類得られる。一般に，それらの総長は異なり，かつ，この場合の最短連結は対称性をもつことから，この２つのうちのどちらかが最短連結となる。もしも，その４点の配置が縦ａ，横ｂの長さをもつ長方形にあるならば，図４，図５における線分T_1T_1'とT_2T_2'のそれぞれの長さ$\sqrt{3}\,a+b$と$a+\sqrt{3}\,b$を比較し，小さい方が最短連結の総長である。

このアルゴリズムによって，一般の４点集合の配置においても，いくつかのSteiner treeを構成することができ，その中から最短連結を比較し求めることが可能である。この第３.節では，４点における最短の連結の考察を，長方形という特別な配置にある場合で例示したが，一般の点集合に対する最短連結の構成法はNP-困難問題であることが知られており，未解決である［4)］。

4.　授業実践

このような数学的議論が背景にある最短連結問題を，実際に高等学校第１学年の生徒と，中学校第３学年の生徒に対して実施した。第４.節では，この実践例を報告する。

4.1.　実施の背景

前述の通り，広島大学附属中・高等学校は，平成15年にS.S.H.の指定を受け，現在活躍する研究者との交流の機会をつくっている。その入門プログラムとして下記の講演を企画した。

実施日：2005年11月18日(金)
講演対象者：広島大学附属高等学校　第１学年
講演者：三村昌泰先生　(明治大学)
講演題目：「ゆらぎを数学からみる(５)
ー細胞インテリジェンスを探ろうー」
（研究コーディネーター：吉村直道）

この講演では，複数のアメーバが最短連結のネットワークを結びながら運動することを数学的なモデルによって解明し，その背景に潜む考えを新しいカーナビへ応用することについて学んだ。その講演を聴いて終わりとするのではなく，その事後学習として最短連結の議論を授業に投げ入れ，高校１年生に考察させた。このときは，１回の授業で計画し，どの内角も120°未満である三角形

の頂点に位置する３点連結においてのみを取り扱った。

この授業は，S.S.H.の事後学習であったため，３点集合の最短連結は三角形の３頂点を120°で見込む内部点を経由する連結であることは先の講演で予め知っている生徒たちがその対象であり，その意味で特殊なケースの授業であった。

そこで，2006年度は新しい教材開発の意味もこめて，最短連結について考えたことがないであろう生徒，中学生に対して3回の授業をもってその考察に取り組んだ。

実施時期：2006年１月15日～２月23日
（毎週，月曜日・金曜日それぞれ１時間）
※なお，この間，家庭学習日があり長期にわたった。
対象生徒：広島大学附属中学校　第３学年（３クラス）
実施回数：１クラスにつき３回
授 業 者：吉村直道

今回の取り組みでは2005年度の授業の反省もあり，３回に分けて余裕をもって取り組み，かつ，ワークシートも準備し，難しい内容であるが初めて考える生徒でも議論できるよう配慮した[参照，資料1・2・3]。

4.2.　授業の展開

4.2.1　連結について（第１日目）

教師による場面設定はするものの，問題のための問題にならないよう，自然な流れで自分たちの解決すべき課題と捉えてもらうため，まず長方形の各頂点に位置する４点の連結について自由に考えさせた。その活動において考えられる連結は無数にあるため，その中から代表的なものを取り上げ，それらの連結についての特徴を生徒たち全体で整理していった。連結の中にさまざまな量を見つけ，数学的な考察をすることができることを確認した上で，連結の線分の長さの総和が最小となる最短連結について考えるように授業を運営した[資料１]。

そして，連結の長さについて考える素地をつくるため，自由に線分の長さの総和が最小と思われる連結を考え，その値を算出させた。

その際，適宜，長方形に位置する４点の最短連結を考える必要な条件として対称な形で連結しなければならないことを確認し，生徒たちの活動を鼓舞していった。

すると，次のような連結が考え出された（図６，図７，図８，図９）。

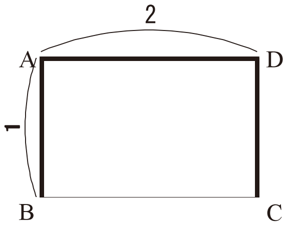


図６

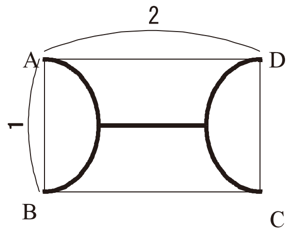


図７

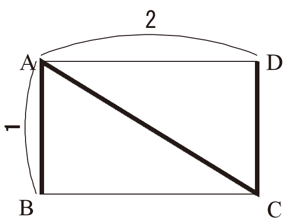


図８

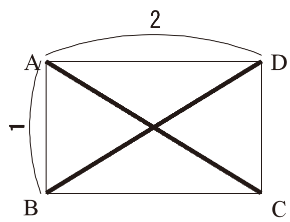


図９

これらにおける連結の総長の値は，

図６が，$1\times 2+2=4$
図７が，$\pi+1 \fallingdotseq 4.14$
図８が，$1\times 2+\sqrt{5} \fallingdotseq 4.23$
図９が，$2\sqrt{5} \fallingdotseq 4.46$

であり，多くの生徒たちが図６から出発し，図８，図９を経て再び図６へと帰っていった。なかなかこのシンプルで素朴な連結から生み出される値４の壁を越えることが難しい。ここで，教師の役割が重要となってくる。活動の目標を常に生徒たちにフィードバックさせるなどといった教師による励ましや鼓舞により，図７のような連結も生徒たち自ら生み出される。それは円というなじみぶかい図形と，コンパスと定木による作図という活動から起因するものと考えられる。

そして，この図７，図９に注目させることにより，さらなる探究を継続させる。図６，図８のように新しい点を付与せず連結を考える場合，その連結の仕方は限定的であり，その中では連結の最小値は４と決まってしまう。しかし，図７，図９のように新しい点を付与して連結を考えた場合，その連結の仕方は無数にあ

り，最短の連結はその中に未だ発見されず存在するかもしれない。しかも，図７は，図８，図９と比較して，点や連結の線分が増えたからといって必ずしも連結の長さが増えていない。これらに気づかせることが，更なる発展に対して極めて重要な役割を果たす。

この場合の最短連結は対称であることと，新しい分岐点を考えることで最短の連結があるのではないかという更なる追究から，１時間の授業の中でクラスに１人くらいの人数で図10の連結を発見する。

この発見は，図７の発見がその素地となっていると考えられる。円弧の部分を直線化することで，この図10の連結が得られる。また，90°という角はそれを構成している２辺の長さも求めやすく，かつ，想起しやすい特別な角であるため，このような連結が考えられたと思われる。

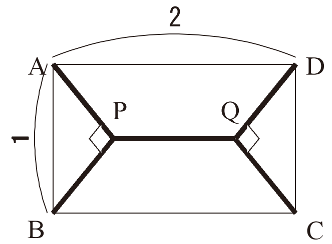


図10

図10の連結では，連結の総長の値は $1+2\sqrt{2}$ となり，約3.82を示す。ついに値４の壁を突破し，この発見に対する本人の喜び，ならびに教室全体の賞賛はすばらしいものがある。反面，この発見の喜びが大きいことと，今まで無理と思われていた値４より小さい値が見つかったことで，生徒たちによる追究はここで基本的に終わってしまう。家庭に帰ってさらに追究する生徒はいるものの，１時間の授業の中では，これらの連結の発見にとどまった。

しかしながら，連結についての理解と，分岐点を新たに加えることで最短の連結がありそうだという実感を生徒とともにつくることができ，第１日目のねらいは果たせたと考えている。

4.2.2　３点における最短連結の考察(第２日目)

第２日目の授業でもワークシート[資料２]を用いて，最短の連結について考えていった。

まず，前回の授業を振り返り，長方形の配置にある４点の最短連結を求めることを確認するが，その連結は無数に考えられるため，具体的に調べていたのでは果たしてそれが最短の連結であるか分からないことに気づかせる。つまり，筋道を立てて考え，計画的に最短経路にアプローチする必要があることに気づく。

そこで，２点の連結ではその２点を直線で結んだ線分が最短であることを確認し，３点へ発展させる。任意な３点の配置もかなり難しいので，三角形の中でも特殊なケースである正三角形について考えることにした。その際，正三角形の性質として先の補題を提示し，その証明を考えることでその補題を理解させた。

その後，正三角形において最短連結を探究させるが，これについては比較的早く，３頂点をそれぞれ120°で見込む内部点を経由した最短連結を発見した。

この場合，生徒たちの活動に，分岐の連結が90°になるような連結は余り見られない。恐らく，この場合も最短連結になるには対称な連結であることが必要であることを理解していたのだろう。そして，正三角形であるためにいろいろな角度から眺めやすく，90°の分岐をもつ連結では対称とならないことが容易に分かり，このような最短連結が早期に発見されると考えられる。正三角形の導入により，３頂点を120°で見込む内部点の発想が自然なものとして得られた。

この段階で，授業では図形描画ソフト「Geometric Constructor Win ver.1.9.4」(フリーシェア・ソフト)を使って，任意な内部点P’をとった連結をつくり，先の連結とその連結とを比較し，３頂点を120°で見込む内部点Pを結んだ連結が最短であるという予想を確かめた(図11)。

そして，さらにG.C.を利用して，正三角形に限らず，内角が120°を超えない三角形において，このAP＋BP＋CPの連結が最短でありそうなことを確認した(図12)。ただし，このとき，最短の連結の様子が三角形の内角が120°以上となるときに変わるということについては言及しない。いろいろな三角形について成り立ちそうだという程度でとどめている。

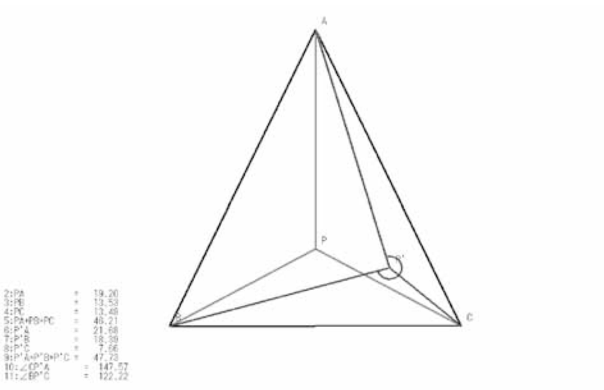


図11

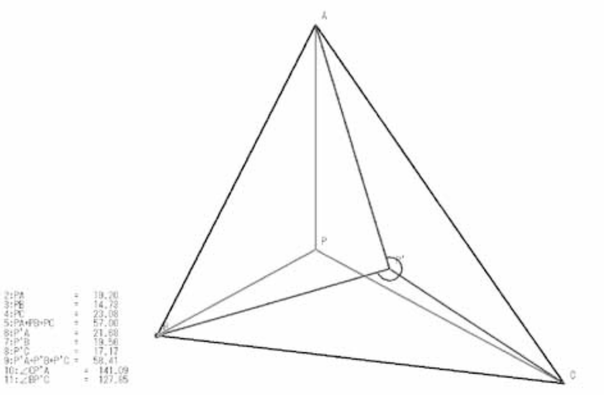


図12

この予想に根拠を与えるため，先の定理１（ア）の証明をみなで考えていった。中学生には余りなじまない証明であったが，問題の魅力と，補題の明瞭さ，ならびに直角三角形の斜辺との比較ということで予想していた以上に理解に困難は見せなかった。

そして，問題は最短連結の一意性であるが，中学生，高校生にも点における連結の線分の次数を導入するのは困難であるため，作図することでそのような点は一つしかないことを暗示し，一意性の証明にかえた。

この作図法を手がかりにして，内角の大きさが120°以上となる三角形においては，前述の３頂点を120°で見込む点は三角形の内部にとれないことが容易に分かる。そこで，これまでの最短連結の議論は，どの内角も120°を超えない三角形の場合であったことに気づき，すべての三角形における最短連結の議論を再構成しなければならなくなる。

授業においては，これまでの学習のまとめをレポートに課すことで，これまでの考察の整理をさせると同時に，すべての三角形における最短連結の議論を再構成させるようにした。授業において，すべてを完了させるというのではなく，このような発展的な学習内容であれば特に，学習展開に家庭学習も含めて考え，生徒の関心の程度ならびに学習の理解に応じた活動を考えたい。

一つの内角の大きさが120°のときと，120°を超える場合の証明は先の定理１（イ），（ウ）にて示したが，生徒の多様さも考慮し，授業では，次のような証明も準備し［6)］，レポート提出後の事後指導や教室掲示による紹介にて対応した。

図13のように∠BAC＝120°のとき，△ABCの内部に任意な点Ｐをとり，AP＋BP＋CPの大きさとAB＋ACの大きさを比較し，どんな点Ｐを考えてもAB＋ACの大きさの方が必ず小さいことを示す。

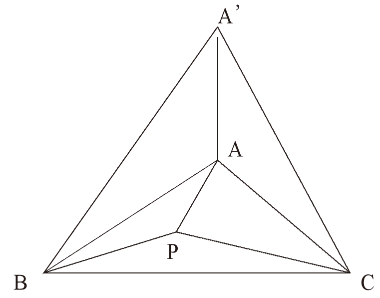


図13

【証明】

まず，図のように，辺BCに関してＡ側に，
∠A'AB＝∠A'AC＝120°
となる点A'をとる。

このとき，∠A'＜120°である。

ここで，△ABCの内部に任意な点Ｐをとると，
△A'BCにおける最短連結より，

$$A'A + AB + AC < A'P + PB + PC$$
$$\leqq A'A + AP + PB + PC$$

よって，
$$AB + AC < AP + PB + PC$$
が成り立ち，△ABCにおけるどんな内部点Ｐをとってつくった連結の長さよりも，AB＋ACの長さの方が短い。

次に，図14のように∠BAC＞120°のとき，△ABCの内部に任意な点Ｐをとり，AP＋BP＋CPの大きさと

AB＋ACの大きさを比較し，どんな点Pを考えても AB＋ACの大きさの方が必ず小さいことを示す。

【証明】

△ABCの内部に任意な点Pをとる。

点P，Cを，点Aを中心に60˚回転した点をそれぞれ点P’，C’とする。

AP＝AP’，AC＝AC’，CP＝C’P’

また，△APP’は正三角形となるから，AP＝PP’

よって，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}=\mathrm{PP'}+\mathrm{BP}+\mathrm{C'P'}$$
$$>\mathrm{BA}+\mathrm{AC'}=\mathrm{BA}+\mathrm{AC}$$

が成り立つ。

△ABCにおけるどんな内部点Pをとってつくった連結の長さよりも，AB＋ACの長さの方が短い。

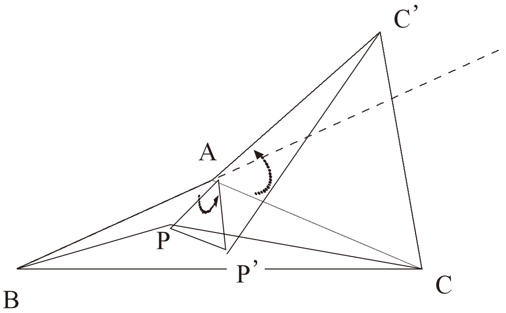


図14

4.2.3　4点（長方形）における最短連結の考察

（第3日目）

これまで2回の授業で，2点ならびに3点における最短連結を考えてきた。当初の課題であった長方形に配置する4点の最短連結について，この授業においてその解決を図っていった［資料3］。

第3.3.節で述べたように，代替点を考え，点を少なくしながら3点における最短連結に帰着させていくことが基本的な流れであろうが，生徒たちはこれまでの経過，図10の経験もあって，すぐにその最短連結を見つけていた（図15）。

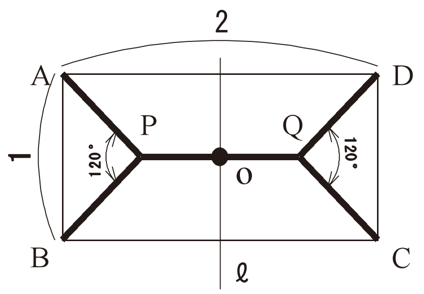


図15

図15の最短連結を見つけられない生徒に対して，そしてクラス全体に対して，この連結の作り方についての説明は，次のように行った。

最短の連結は，直線ℓを長方形ABCDの内部において必ず横切りかつ対称性をもつ。このことより，最短の連結は必ず点Oを通過することになり，△ABOと△OCDにおける最短連結を考えればよいことを助言した。

そのような活動から，この場合における最短連結の長さは$2+\sqrt{3}$となり，約3.73であった。図10よりも短い連結を確認することができた。

ここで，当初の問題解決はなされ，一連の解決過程において筋道を立てて考察するよさ，ならびに解決を通してこれまで学習した数学を利用しながら問題を解決する活動を実践することができた。

しかしさらに，この解決過程の考察から新しい課題に気づくようになる。それは先の図4，図5で示したように，長方形には2方向から異なる2つのSteiner treeが存在し，それを検討しなければならないことである。この事実に気づかせるために，授業では敢えて正方形にちかい長方形を用意し，生徒たちに気づきやすいようにした。この検討は，中学生でも初等幾何の知識をつかって容易に，縦の長さaと横の長さbによる長方形の連結の長さの関係式をつくり考察することができる。

しかし，多様な生徒がいることに配慮し，かつ，一連の授業の最終段階としてある一定の理解をもって終わりたかったので，授業では，そうした検討には取り組まず，基本にもどり実測という手段で比較し，「横長の長方形であれば，”>—<”型」，「縦長の長方形であれ

ば，”X ”型」という風にまとめ，興味・関心をもった生徒たちが自分たちなりに考察を進展させることができる余地を残していった。

そして最後に，レポート課題という形で，長方形には限定しない四角形において最短連結を探究させる活動に取り組ませた。その四角形は生徒たち自身，自由に決めていいことにし，予め辺の長さや角度の大きさなども自分で設定して，その四角形における最短連結を考えさせた。実際には，ひし形を選んで調べる生徒が比較的多かった。中には，上手く考察はできていないものの五角形ならどうなるだろうかといったことに関心をもち記述していた生徒もいた。

5. 授業実践の反省

問題が身近なものでありながら，NP-困難問題と呼ばれる複雑さ・困難さをもったものであり，逆に生徒たちは終始，興味・関心を持ち続け，意欲的に取り組むことができた。教材のもつ魅力によるところが大きい。

ただし，授業展開が二転三転しており，普段の授業と比べてそれぞれの展開のつながりに飛躍が大きいところが随分あったように感じられる。ワークシートを準備し，生徒たちに学習の方向性を限定して進めたことで，この問題点を少しでも解消するように対応したが，まだまだ不十分であった。

全体として，3点あるいは4点までの距離の和が最小となる点を求めていく過程を通して，図形的考察のよさ，論理的考察のよさを知ることができた。そして，2点だったら，3点だったら，正三角形だったら，任意な三角形だったら，長方形だったらと，発展的・創造的な思考の展開を生み出しており，任意に4点が配置されたら，n点になったらと進みやすく，かつ，その行為はまさに現在研究中の活動であり，生徒たちにあたらしい数学の捉えを生み出してくれる機会をもったものである。数学がすでに成熟して完成をみているような固定的で，静的な学問ではなく，発展可能で動的な学問，可能性に満ちあふれた分野であると意識する一つのきっかけになると期待している。

6. おわりに

― 現在研究中の分野における教材化の留意点 ―

現在研究中の分野を取り上げるということは，生徒たちにとって大変興味深く，知的好奇心を喚起させる機会の一つである。このような数学を教材化するという努力が，数学嫌いを少なくし，より多くの数理科学者を生み出すことへとつながるかもしれない。

最後に，このような取り組みを増やすためにも，この授業を振り返り，最先端の数学の場面を教材化する上での整理できる留意点を，ここでまとめておきたい。

① 単に最先端の分野，難しい題材を選ぶのではなく，数学的根拠がしっかりしているものを選ぶ。

② 場合によっては，厳密な証明をするのではなく，生徒の実態，授業のねらいに応じた適当な証明等を用いる。コンピュータ等，情報機器を上手く利用しながら，直観的・視覚的理解を促す。

③ 自分たちで発展させ，研究することができる余地を残す。

④ 発展学習なので，多様な生徒たちがいることを前提とし，全員による完全な理解を求めず，個に応じた理解を目標とする。

①は，単に難しい，単に目新しい分野を授業として取り上げるのではないことを主張している。現在まさに研究中の分野においては，数学的議論がまだ確立されていないものもあると同時に，生徒たちの発達段階に応じた数学的考察が選択できない場面が起こり得る。したがって，研究中の分野においてもある程度数学的議論が確立されているものになっているものを，授業では扱うべきである。最短連結問題はそれに適した教材であると考える。

また，②で示すように，生徒たちの発達段階に応じた考察を指導者が方向づけるとともに，コンピュータ等の視聴覚機器を上手く利用したい。第2日目の授業でもあったように，コンピュータでシミュレーションし理解の強化を図ったり，コンパスと定木で作図することによって，Steiner pointが一つしかとれないことを暗に意図したりとしたことが，この例である。

次に，③についてである。最先端の分野を考察させる

ことで創造的な数学的活動に従事させたい。その際，その分野の全てを扱い，その分野の困難さに直面させるのではない。その分野のまさに発展しているところを示し，数学的考察が可能性をもって拡張されるところを経験するとともに，その考察の困難さを自らが気づき体験することに意義があると考える。この授業実践では，第２日目，第３日目のレポートによる考察がそれにあたるものであり，授業における数学的な考察を基にして，一般的な３点における最短連結に取り組んだり，任意な４点における最短連結へと発展する可能性を含んだりしたところが，これを考慮して計画したところである。授業では，敢えて任意な4点における最短連結のアルゴリズムは取り上げていない。

④については，このような取り組みはあくまでも発展的学習として取り扱われるべきものであろうから，すべての生徒たちにある一定以上の成果を上げなければならないといったものではない。よって，すべての生徒たちの興味・関心を高め，純粋な知的好奇心を呼び起こさせ数学的な考え方のよさを感得させられれば，一つの目標は達成されると考えている。そこで，この授業実践のように，レポートを課す等，個別に学習内容の理解度をはかり，個に応じた発達が受容・期待されるよう工夫したい。

以上，現在研究中の数学の内容を教材化する上での留意点を，この授業事例をもとに整理するとともに，算数・数学教育学研究において，新しい授業実践の蓄積と研究題材の提供という点で意義あることと考え，批判・改善等多々ありながらも，本稿では一つの授業報告に取り組んだ。

引用及び参考文献

1)　松本堯生他，2003,「創造的才能を高める数学教育のカリキュラム研究と教材開発」，広島大学学部・附属学校共同研究機構研究紀要，第31号，pp.139－148.

2)　松本堯生他，2004，「創造的才能を高める数学教育のカリキュラム研究と教材開発(2)」，広島大学学部・附属学校共同研究機構研究紀要，第32号，pp.199－206.

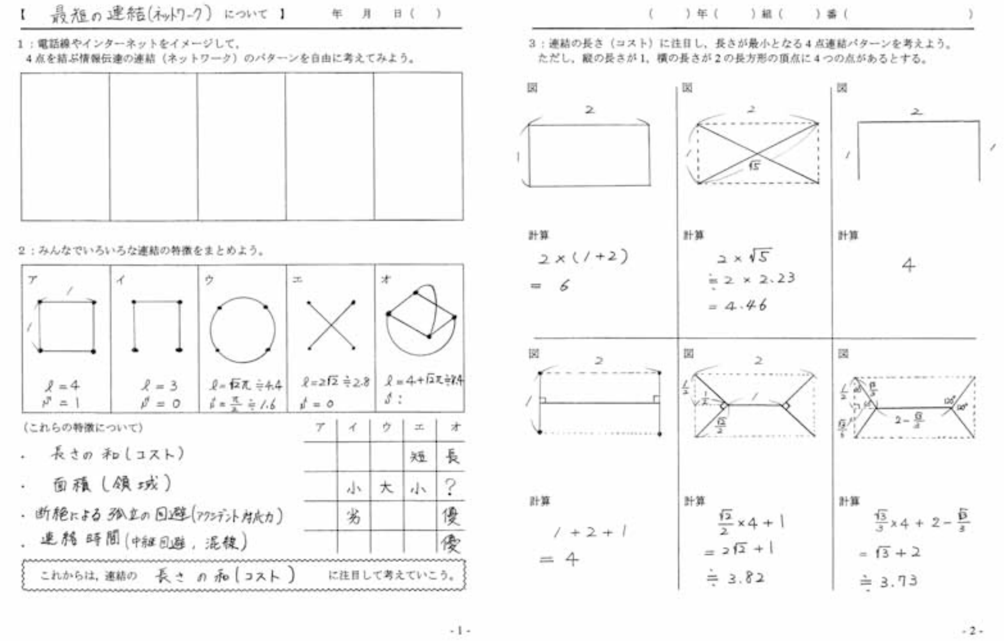
3)　文部科学省，新学習指導要領(高等学校)，http://www.mext.go.jp/b_menu/shuppan/sonota/990301d/990301e.htm(2007年６月）.

4)　秋山仁，R. L. Graham著，1993,『離散数学入門(改訂版)』，朝倉書店，pp.86－103，pp.137－159.

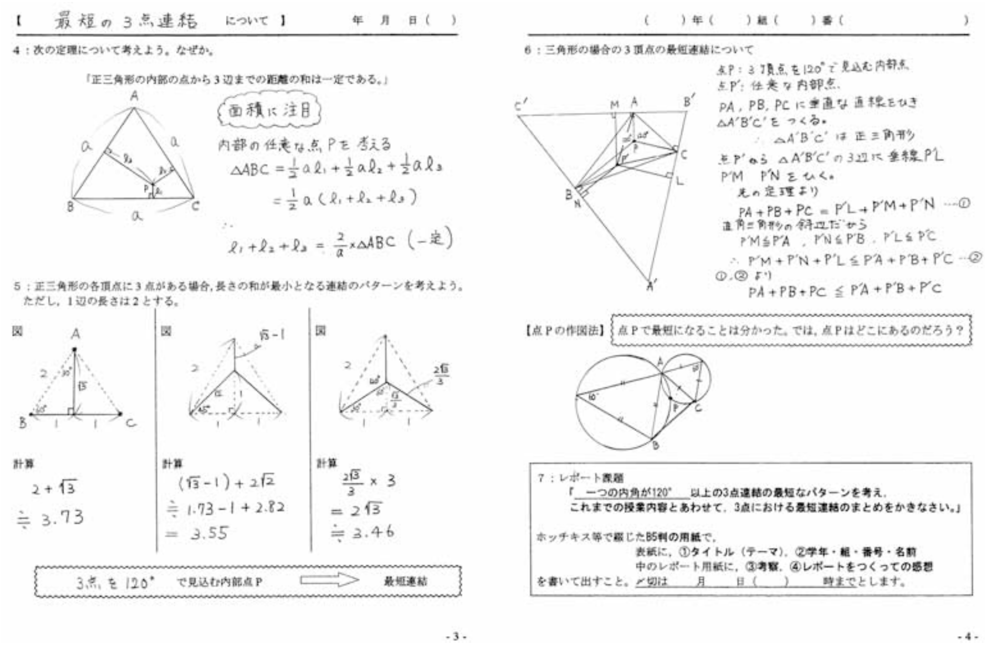
5)　V.V.ヴァジラーニ著，浅野孝夫訳，2002,『近似アルゴリズム』，シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社，pp.27－38.

6)　那須俊夫著，1990,『変換幾何入門』，共立出版，pp.19－24.

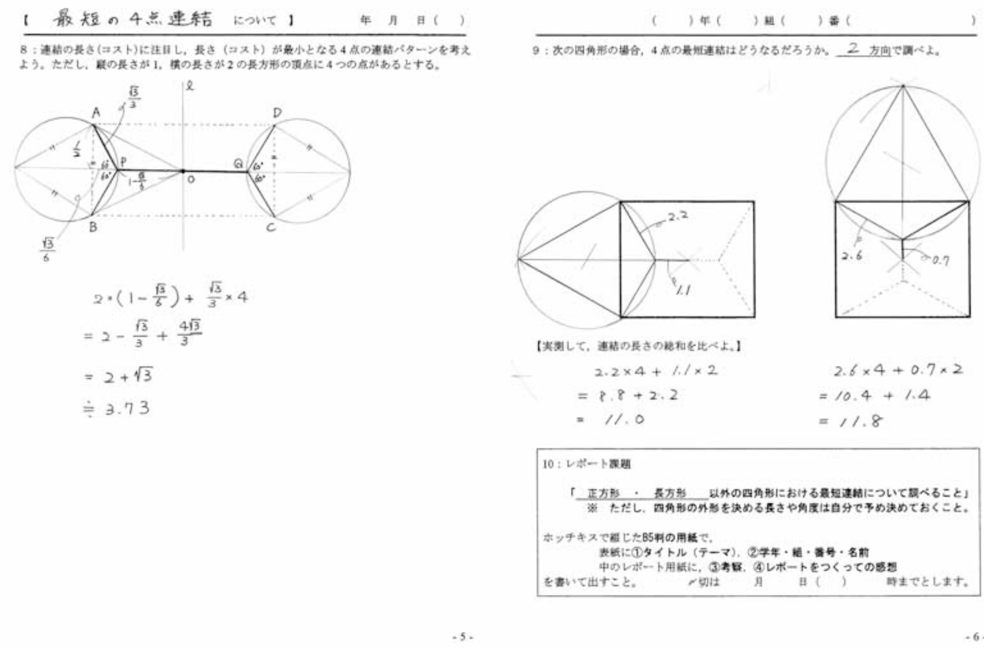
【資料１】授業で，実際に用いた第１日目のワークシート



【資料２】授業で，実際に用いた第２日目のワークシート



【資料３】授業で，実際に用いた第３日目のワークシート



※手書きの部分は指導者のメモである。実際は，ブランクになっていて，生徒たちが書き埋めていく。