愛媛大学教育学部紀要　第55巻　79～92　2008

『数学作りの授業』のための題材例（その１）

（数学科教育研究室）　　藤　本　義　明

Materials for ‘Class through Making Mathematics’ (1)

Yoshiaki FUJIMOTO

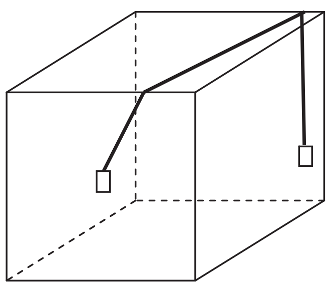
（平成20年６月11日受理）

１　はじめに

教科としての数学について，出来上がったもの，与えられるものとしての数学観に対して，近年，数学を作り上げられるものとして観る数学観が市民権を得てきている。そこでは，実際，生徒自ら数学的性質を発見したり，生徒自らが数学を作り上げていくといった授業が行なわれる。このような授業を行なう場合，出来上がった数学をアレンジして，生徒が発見する場面を仕組むことがよく行なわれている。しかし，出来上がった数学をアレンジした授業は，筋立てが決まっていて，数学を作る真似事に終わってしまいがちである。出来合いでは無い数学を，実際に作る過程が体験できる数学の授業が望まれる所である。しかしながら，出来合いで無い数学を学校現場が準備することは困難であろう。そのために，本稿は，「数学作り」を目指した授業の題材を提案する。

Ⅱ　図形教材（対象：中学３年以降）

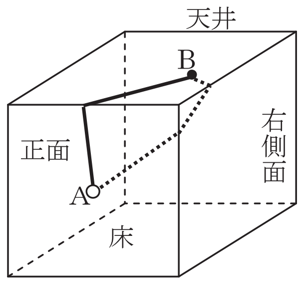
〈原題〉立方体の部屋に２つのコンセントをつけ，電気コードでつなぎたい。壁を伝って配線するとき，電気コードを最短にするにはどう配線すればよいか。



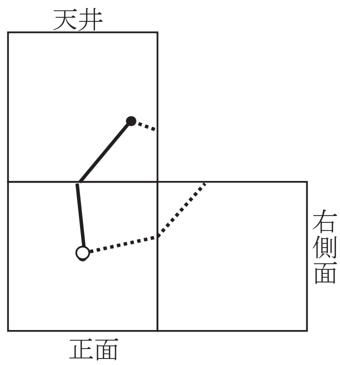
§１　隣りの壁（正面と天井）にコンセントがあるとき

（１）一方のコンセントＡが正面の中央にあるとき

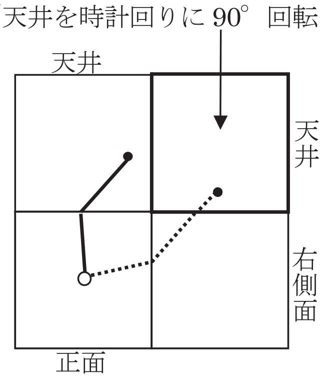
〈考え方〉隣り合う２つの壁（正面・天井）を結ぶ（実線）より，３つの壁（正面・右側面・天井）を結ぶ（点線）方がコードが短いこともあるだろう。



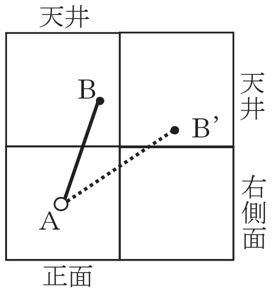
〈展開図〉



「天井を時計回りに90°回転させた図」を加える

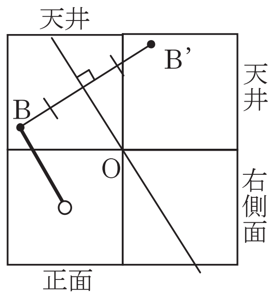


〈コードが最短となる場合〉



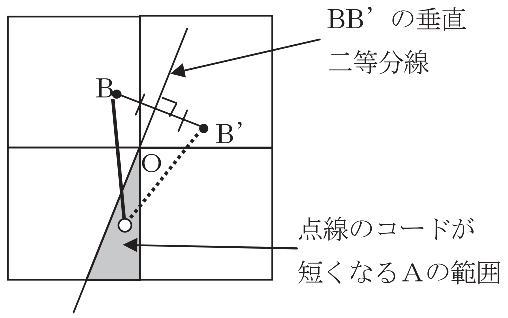
〈問題〉点線のコードが引けないときがあるか。

（解答）例えば右図のような，場合には，点線のコードは引けない。



〈問題〉B が与えられたとき，点線の方が短くなる A の範囲はどうか。

（解答）



〈発展問題〉点線が存在しないような B の範囲を求めよ。

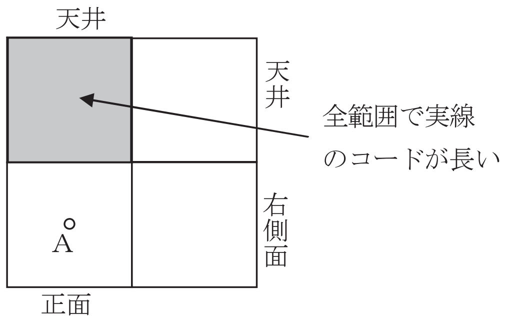
〈問題〉BB’ の垂直二等分線は中心の点 O を通るか。

（解答）OB = OB’ だから

O は垂直二等分線上にある。

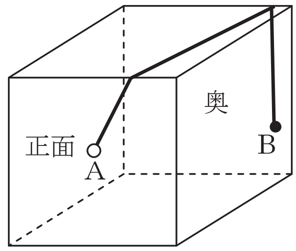
〈問題〉① A が正面の中央にあるとき，点線のコードが短くなる B の範囲を求めよ。

（解答）そのような範囲は無い。



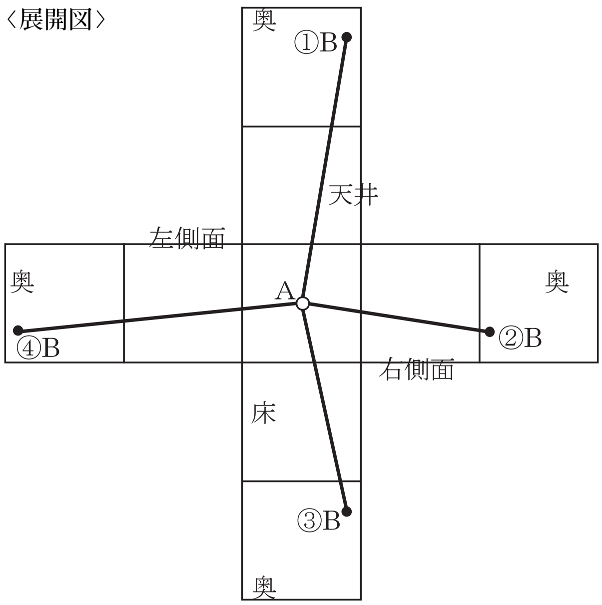
§2　向かい合う壁（正面と奥）にコンセントがあるとき

（1）一方のコンセント A が正面の中央にあるとき



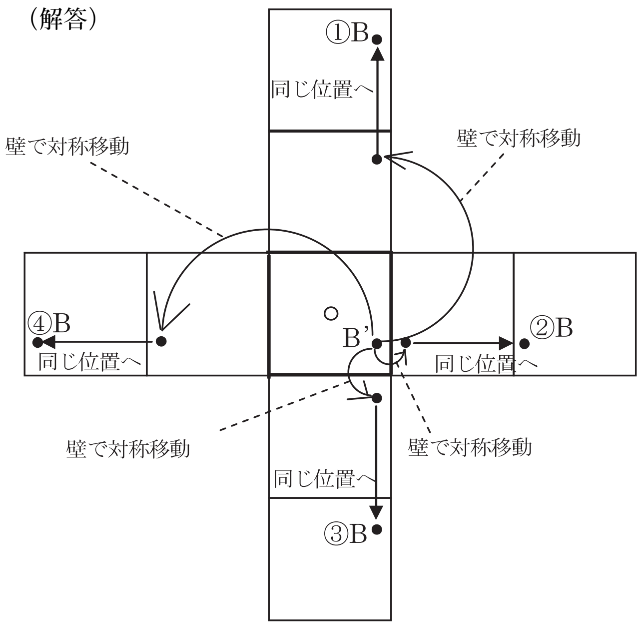
経由する面として，①天井，②右側面，③床，④左側面の 4 つが考えられる。展開図をまとめてかくと

〈展開図〉



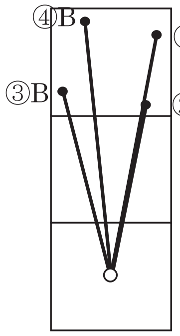
〈問題〉正面から見た B（B’ のこと）に対し，4 つの点 B はどのような位置関係にあるか。

（解答）



4つの点Bとも，壁に対称移動した後，同じ位置へ移動させて得られる。

〈アイデア〉4本のコードを1ヶ所に集めて表現する。

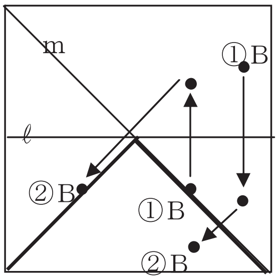


したがって，正面のコンセントAから，奥のコンセントBまでのコードの長さは，経由する面が②右側面，③床，①天井，④左側面の順で長くなる。

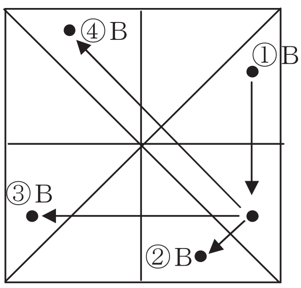
＊①B（天井）を元にした，②B（右側面）の作り方

ℓ について対称移動した後，

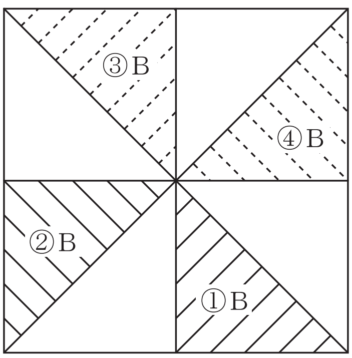
m について対称移動する。



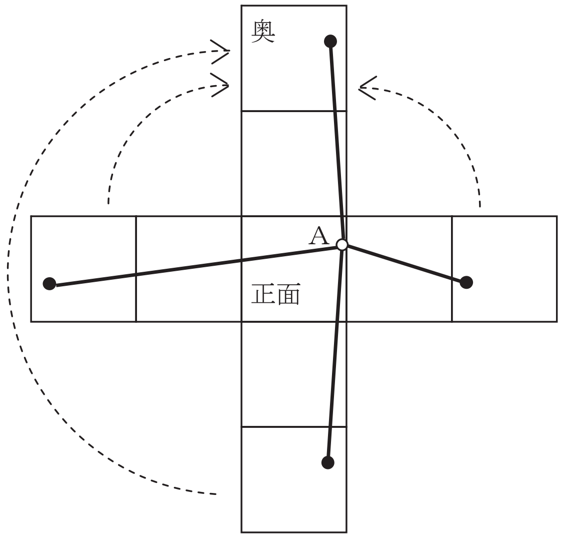
＊①Bを元にした，②B〜④Bの作り方



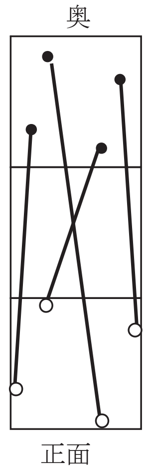
＊①Bが斜線部にあるときの，②B〜④Bの範囲

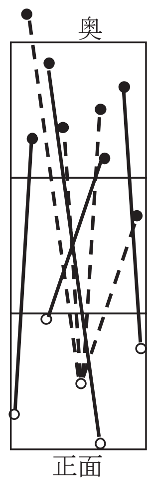


（2）一方のコンセントAが正面の中央でないとき

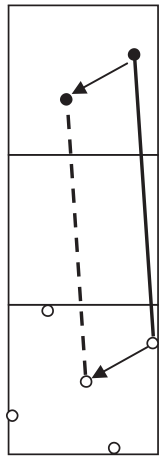


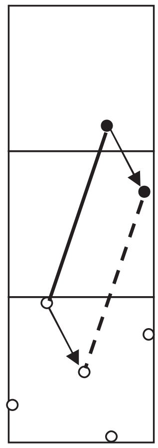
〔上図のように回転させ1ヶ所へ集める〕　〔出発(○)を中央に統一する：点線〕

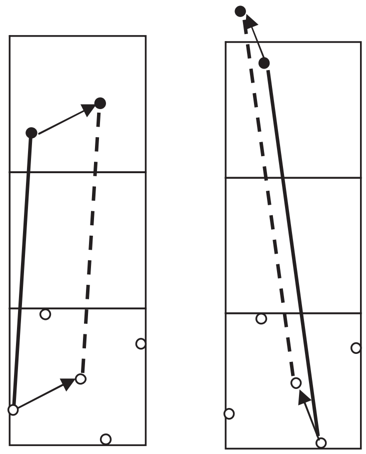




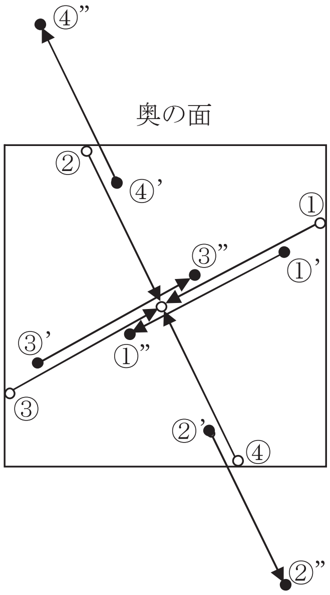
〈○の動きは，●の動きで決まる〉







〈奥の面での各点の位置関係〉



〈複素平面〉複素平面（右上図）を考える。

中心を原点 0+0i，①を a+bi　①’ を x+yi とおくと，

他の出発点は

② (a+bi) i　③−(a+bi)　④ (a+bi)(−i)

また，他の到達点は

②’ (x+yi)(−i)　③’ −(x+yi)　④’ (x+yi) i

出発点を正面の中心に統一したときの到達点は

①”が，$(x+yi)-(a+bi)=(x-a)+(y-b)i$

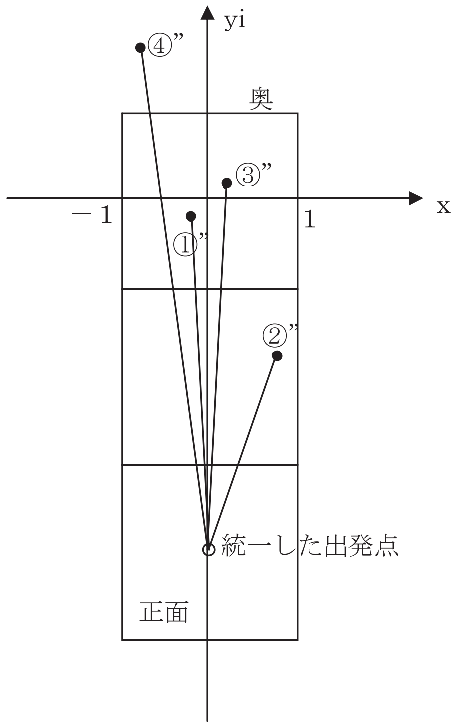
②”が，$(x+yi)(-i)-(a+bi)i=-xi+y-ai+b$

$=(y+b)-(x+a)i$

③”が，$-(x+yi)+(a+bi)=-(x-a)-(y-b)i$

④”が，$(x+yi)i-(a+bi)(-i)=xi-y+ai-b$

$=-(y+b)+(x+a)i$



〈出発点を（−0.7，0）としたとき〉

面の１辺の長さを２，正面の出発点を奥の面での（−0.7，0）（つまり，a＝−0.7，b＝0）の位置とすると，統一した出発点は（0，−4）と考えられるので，この点から①”，②”，③”，④”までの距離をそれぞれ求めると，奥の面上の各点について，最短の経由面は，次のような結果になる。

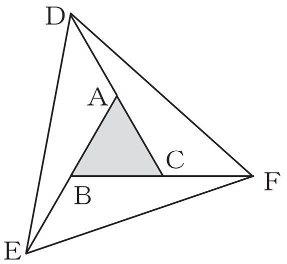
ただし，経由面①”，②”，③”，④”をそれぞれ１，２，３，４で表し，42は最短の経由面が４と２の２つあることを示している。

奥

4	4	4	4	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	4	4	4	4	4	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	4	4	4	4	4	4	4	4	41	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1	1	1	1	1	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1	1	1	1	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1	2	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	42	2	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	42	2	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	42	2	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	42	2	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	42	2	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	43	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Ⅲ　図形教材（対象：中学３年以降）

〈原題〉正三角形 ABC の各辺を２倍に伸ばして３点 D, E, F を作ると，△ABC と △DEF にはどのような関係があるだろうか。



§１　正三角形

＊以下，AB＝1 とする。

〈問題〉△DEF も正三角形であることを示せ。

（解答）△ADE ≡ △BEF ≡ △CFA は明らか

よって，DE＝EF＝FD より △DEF も正三角形である。

〈問題〉△ABC と △DEF の相似比はいくらか。

（解答）〈高校：余弦定理の利用〉

△CDF において，余弦定理より

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 - 2CD\cdot CF\cos\angle DCF$$
$$= 4+1-2\times2\times1\times\cos 120^\circ$$
$$= 4+1-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$$

よって，$DF=\sqrt{7}$　　（答）$1:\sqrt{7}$

（別解）〈中学：三平方の定理の利用〉

A から BC に垂線 AH を下ろす。

△CAH と △CDB において，

$CA:CD=CH:CB$

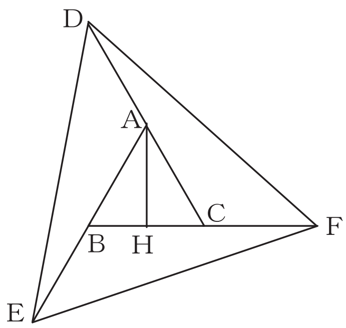
$=1:2$　∠C は共通

よって，

△CAH∽△CDB

したがって，

∠DBC＝∠R



$AH=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より　$BD=\sqrt{3}$

BF＝2 より，三平方の定理から

$DF=\sqrt{BD^2+BF^2}=\sqrt{3+4}=\sqrt{7}$

〈問題〉△ABC と △DEF の重心が一致することを示せ。

（解答）〈高校：ベクトルの利用〉

△ABC の重心を G，△DEF の重心を P とする。

３点 A, B, C の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$，点 P，点 G の位置ベクトルを $\vec{p}$, $\vec{g}$ とすると，点 D の位置ベクトル $\vec{d}$ は，D が線分 CA を１：２に外分する点だから

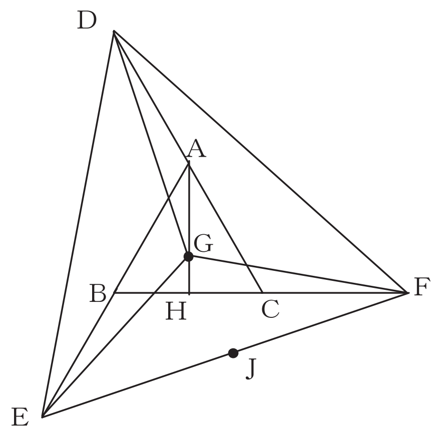
$$\vec{d}=\frac{-2\vec{c}+\vec{a}}{1-2}=2\vec{c}-\vec{a}$$

同様に，$\vec{e}=2\vec{a}-\vec{b}$　$\vec{f}=2\vec{b}-\vec{c}$

$$\vec{p}=\frac{\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{3}$$
$$=\frac{2\vec{c}-\vec{a}+2\vec{a}-\vec{b}+2\vec{b}-\vec{c}}{3}$$
$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\vec{g}$$

したがって，２つの三角形の重心は一致する。

〈中学：三平方の定理の利用〉



EF の中点を J とすると，$DJ=\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$

$HG=\frac{1}{3}AH=\frac{\sqrt{3}}{6}$，$HF=\frac{3}{2}$ より

$GF=\sqrt{HG^2+HF^2}=\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{28}{12}}=\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$

同様に，$EG=DG=\frac{\sqrt{21}}{3}$ である。

３辺が等しいので，△DEG ≡ DFG

よって，G は ∠EDF の二等分線上にある。

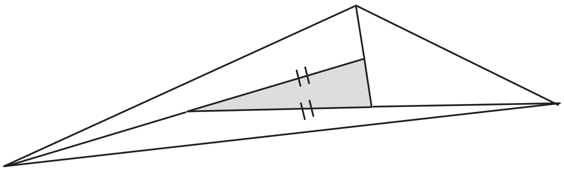
また，$DG:DJ=\frac{\sqrt{21}}{3}:\frac{\sqrt{21}}{2}=2:3$ より，G は △DEF の重心でもある。

§２　直角三角形での相似

＊２つの三角形の相似は，どんな三角形でも成り立つのか。

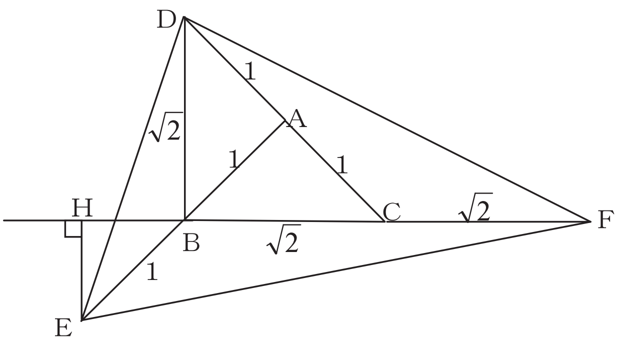
〈予想〉頂角が小さい二等辺三角形では，その三角形と，

各辺を拡大した点でできる三角形とは，相似にはならないだろう。



〈問題〉直角二等辺三角形 ABC の各辺を 2 倍に拡大した点でできる三角形 DEF は，直角三角形ではないことを示せ。

（解答）△ABC を AB＝1 の直角二等辺三角形とする。



$$DF=\sqrt{BD^2+BF^2}=\sqrt{\sqrt{2}^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$$

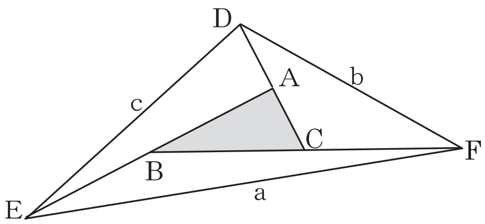
$$DE=\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$HE=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad HF=\frac{1}{\sqrt{2}}+2\sqrt{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\text{ より}$$

$$EF=\sqrt{HE^2+HF^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{13}$$

よって，$DE^2+DF^2\neq EF^2$ なので，△DEF は直角三角形ではない。

（別解）△ABC を 1，2，$\sqrt{3}$ の直角三角形とする。



△BEF で，

$$a^2=4^2+(\sqrt{3})^2-2\times4\times\sqrt{3}\cos150^\circ$$

$$=16+3-8\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=31$$

△CFD で，

$$b^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120^\circ$$

$$=4+4-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=12$$

△ADE で，$c^2=1^2+(2\sqrt{3})^2=13$

よって，$a^2\neq b^2+c^2$ であるから，△DEF は直角三角形ではない。

§３　一般の三角形での重心

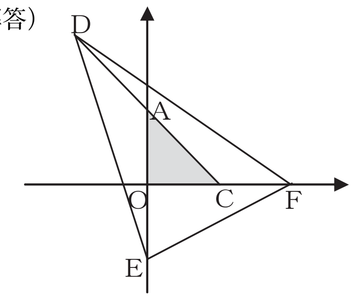
〈アイデア〉正三角形については，２つの三角形の重心は一致したが，一般の三角形の五心は一致するのだろうか。

〈作図ソフトによる確認〉作図ソフトによって，次のことが確認できる。

- 重心は，一致する
- 内心，垂心，外心，傍心はどれも一致しない

〈問題〉直角二等辺三角形とその各辺を２倍に拡大した点でできる三角形では，それぞれの重心が一致することを示せ。

（解答）



A（０，１）
C（１，０）
D（－１，２）
E（０，－１）
F（２，０）
とおく。

△AOC の重心 G は $\left(\frac{0+0+1}{3},\frac{1+0+0}{3}\right)$ より

$G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

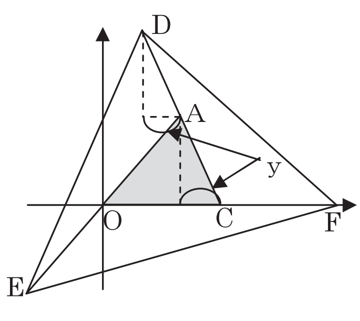
△DEF の重心 G’ は $\left(\frac{-1+0+2}{3},\frac{2-1+0}{3}\right)$ より

$G'\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

したがって，G と G’ は一致する。

〈問題〉一般の三角形の場合，２つの三角形の重心が一致することを示せ。

（解答）△AOC で，A (a , b)，C (c，0) とする。



ここで，$y=c-a$ とおくと

$x=a-y=2a-c$

△AOC の重心 G は $\left(\frac{a+0+c}{3},\ \frac{b+0+0}{3}\right)$ より

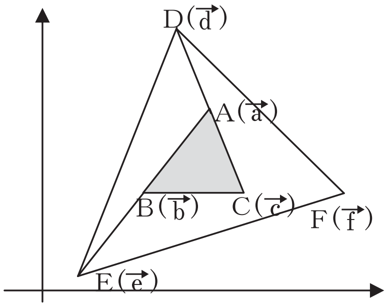
$G\left(\frac{a+c}{3},\ \frac{b}{3}\right)$

△DEF の重心は G’ は

$\left(\frac{2a-c-a+2c}{3},\ \frac{2b-b+0}{3}\right)$ より，

$G'\left(\frac{a+c}{3},\ \frac{b}{3}\right)$

したがって，G と G’ は一致する。



（別解）

△ABC の重心を G($\vec{g}$)，

△DEF の重心を G’($\vec{g}'$) とする。

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\vec{d}=\frac{-2\vec{c}+\vec{a}}{1-2}=2\vec{c}-\vec{a}$$

$$\vec{e}=\frac{-2\vec{a}+\vec{b}}{1-2}=2\vec{a}-\vec{b}$$

$$\vec{f}=\frac{-2\vec{b}+\vec{c}}{1-2}=2\vec{b}-\vec{c}$$

$$\vec{g}'=\frac{2\vec{c}-\vec{a}+2\vec{a}-\vec{b}+2\vec{b}-\vec{c}}{3}$$

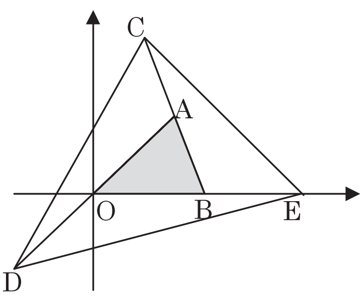
$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

よって，$\vec{g}=\vec{g}'$

§４　一般の三角形を１：p に拡大・縮小

三角形を，１：２ではなく，一般的に１：p に拡大・縮小したらどうか？

〈問題〉ある三角形とその各辺を１：p に拡大した点でできる三角形において，それぞれの重心は一致することを示せ。



（解答）A(a, b)，B(c, 0) とおくと，

C(a−(p−1)(c−a), pb)

D(a−(p−1)(c−a), pb)

E((−p+1)a, (−p+1)b) であるから

△AOB の重心は $G\left(\frac{a+c}{3},\ \frac{b}{3}\right)$

△CDE の重心は

$$G'\left(\frac{pc+a-(p-1)(c-a)}{3},\ \frac{pb+(-p+1)b}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{pc+a-pc+pa+c-a-pa+a}{3},\ \frac{pb-pb+b}{3}\right)$$

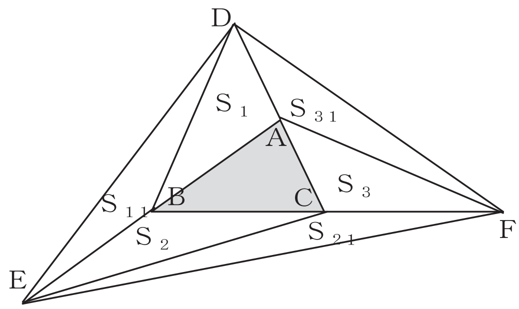
$$=\left(\frac{a+c}{3},\ \frac{b}{3}\right)$$

よって，G と G’ は一致する。

§５　面　　積

１．三角形の場合

〈問題〉△ABC と △DEF の面積比を求めよ。



（解答）△ABC = S とおくと

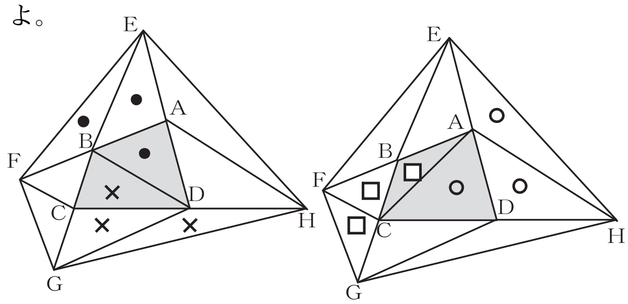
$S_1=S$，$S_2=S$，$S_3=S$

$S_1=S_{11}$，$S_2=S_{21}$，$S_3=S_{31}$

したがって，△DEF = △ABC × 7

２．四角形の場合

〈問題〉四角形 ABCD と四角形 EFGH の面積比を求めよ。

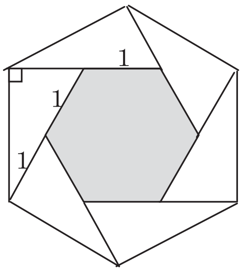


（解答）　●+×=○+□

四角形 EFGH= 3(●+×)+2(○+□)= 5(●+×)

=四角形 ABCD × 5

3．正6角形の場合

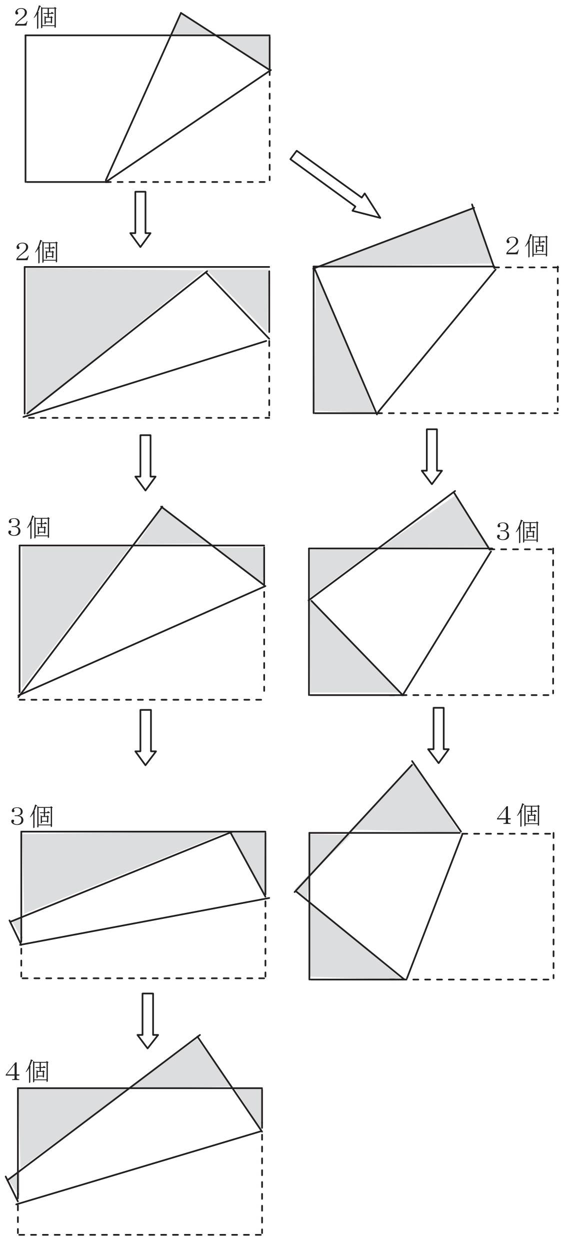


相似比は1：$\sqrt{3}$ より，
面積比は1：3

〈発展問題〉三角形の各辺をn倍した点でできる三角形の面積は，元の三角形の何倍か。四角形ではどうか。

Ⅳ　図形教材（対象：中学3年以降）

〈原題〉長方形の紙を折る。このとき，相似形はいくつできるだろうか。



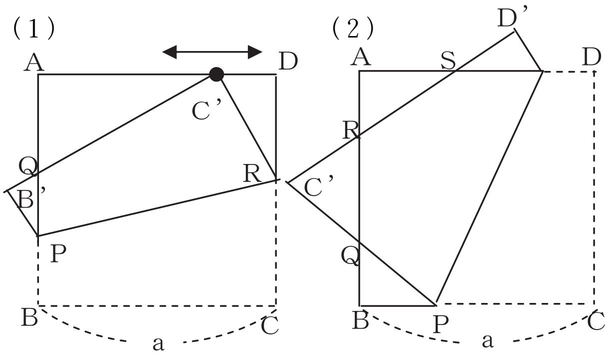
＊隣り合う辺を結んで折るとき………最大2個
＊向かい合う辺を結んで折るとき……最大4個

§1　正方形

〈特殊化〉

長方形では，いろいろな形が考えられてまとめにくいから，まずは正方形で考えよう。

＊正方形では，次の2つの場合しかない。



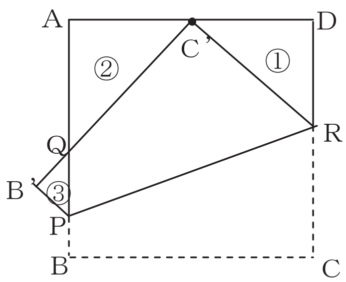
〈問題〉（1）で，C’ の動く範囲はどうか。

（解答）C’ は辺 AD 上を動く（ただし，端点は除く）

　C’D ＝ x として，$0 < x < a$

〈問題〉（1）で，①，②，③の面積比はいくらか。

$a = 10$，$x = 5$ で考えよう



（解答）

RD ＝ y とすると，C’R ＝ CR ＝ $10 - y$

$5^2 + y^2 = (10 - y)^2$　これを解いて，$y = \frac{15}{4}$

　よって，$RD = \frac{15}{4}$　$C'R = \frac{25}{4}$

①：②＝ $RD : AC' = \frac{15}{4} : 5 = 3 : 4$

　したがって，$AQ = C'D \times \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$

また，$PQ = 5t$，$B'Q = 4t$，$B'P = 3t$　とおけるから

　$QB = PQ + B'P = 10 - AQ$

$8t = 10 - \frac{20}{3}$　これを解いて，$t = \frac{5}{12}$

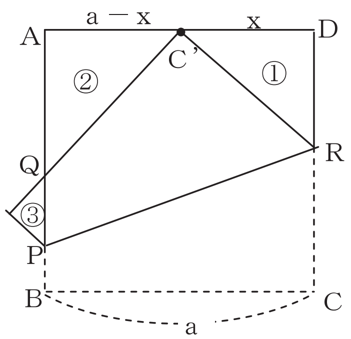
したがって，$B'P = 3 \times \frac{5}{12} = \frac{5}{4}$

以上より，

①：②：③$= RD : AC' : B'P = \frac{15}{4} : 5 : \frac{5}{4} = 15 : 20 : 5$

$= 3 : 4 : 1$

〈問題〉一般化：一般に，1辺の長さが a の正方形で考えよう。



（解答）

$RD = y$ とすると，$C'R = CR = a - y$

$x^2 + y^2 = (a-y)^2$

これを解いて，$y = \frac{a^2 - x^2}{2a}$

よって，$RD = \frac{a^2 - x^2}{2a}$

$C'R = a - \frac{a^2 - x^2}{2a} = \frac{a^2 + x^2}{2a}$

①：②$= RD : AC' = \frac{a^2 - x^2}{2a} : a - x = a + x : 2a$

したがって，$AQ = C'D \times \frac{AC'}{RD} = x \times \frac{2a}{a+x} = \frac{2ax}{a+x}$

また，$C'Q = C'R \times \frac{AC'}{RD} = \frac{a^2 + x^2}{2a} \times \frac{2a}{a+x} = \frac{a^2 + x^2}{a+x}$

ここで，$B'Q = a \quad C'Q = a - \frac{a^2 + x^2}{a+x} = \frac{ax - x^2}{a+x}$

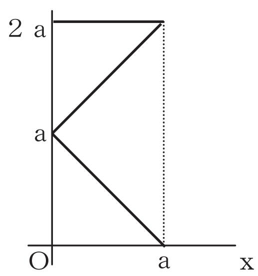
したがって，②：③$= AQ : B'Q = \frac{2ax}{a+x} : \frac{ax - x^2}{a+x}$

$= 2a : a - x$

以上より，①：②：③$= a + x : 2a : a - x$

$(0 < x < a)$ である。

〈性質〉



①，②，③の比をグラフに表すと

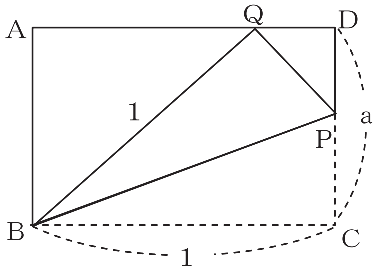
グラフより，面積として，

③<①<②が成り立つ。

また，相似比として，①+③=②が成り立つ。

§2　長方形

〈問題〉長方形で考えてみる。



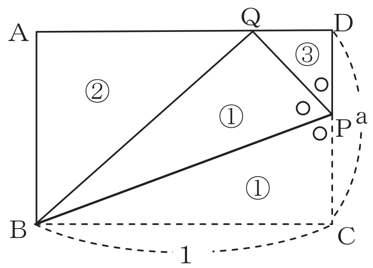
（解答）$AQ = \sqrt{1 - a^2} \quad QD = 1 - \sqrt{1 - a^2}$

$\triangle ABQ : \triangle DQP = AB : QD = 1 : 1 - \sqrt{1 - a^2}$

ただし，$a < 1$

したがって，$\triangle ABQ > \triangle DQP \, (a < 1)$ が成り立つ。

〈問題〉4つの直角三角形がすべて相似となる a はいくらか？



（解答）　すべてが相似になるのは，

$\angle BPC = \angle BPQ = \angle QPD = 60^\circ$

のときである。

よって，$CP = PQ = \frac{1}{\sqrt{3}}$，$BP = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$AB : BC = BQ : BP$

$a : 1 = 1 : \frac{2}{\sqrt{3}}$　したがって，$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

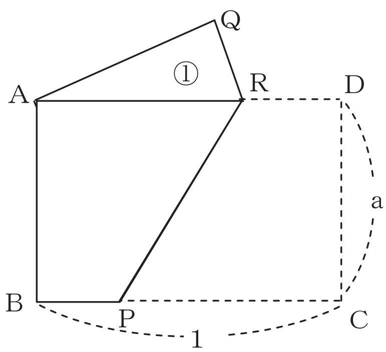
このとき，①：②：③$= BP : BQ : PQ$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} : 1 : \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

また，①，②，③の相似比は，①の3辺の比に等しいことがわかる。

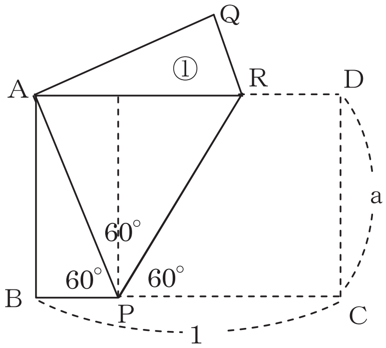
〈問題〉

$\triangle APR$ はどのような三角形か。

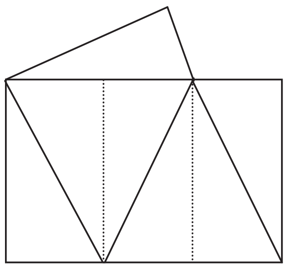


（解答）
AB = AQ (= a) よって，①≡②である。
したがって，△APR は二等辺三角形である。

〈問題〉　△APR が正三角形になるのは，a がいくらのときか？

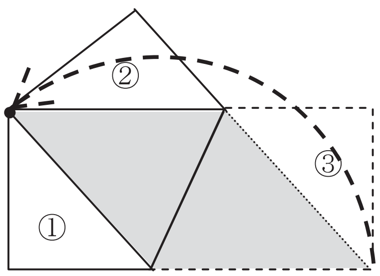


（解答）
BP = QR = RD
AR = 2BP
したがって，1 = AD = 2BP + RD = 2RD + RD = 3RD
RD = $\frac{1}{3}$
よって，BP = RD = $\frac{1}{3}$
すなわち，a = AB = $\sqrt{3}$BP = $\frac{\sqrt{3}}{3}$
〈発展〉



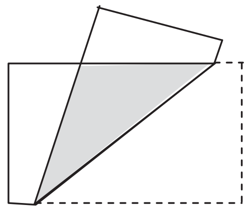
つまり，a = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，左図のようになり，7つの直角三角形は，すべて合同である。

〈補足〉一般の場合，端を図のように重ねて折るとき①，②は合同である。

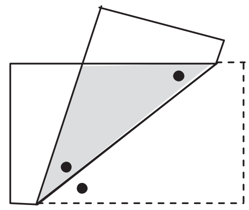


さらに③も合同であるならば，
AR = CR より，四角形 APCR はひし形である。

§3　相似な三角形を作らない折り方

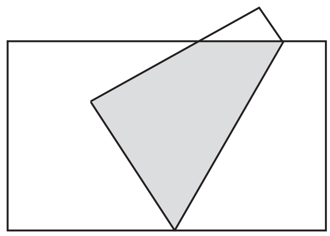


〈問題〉どんな三角形にすることができるか。
（解答）右図のように，
いつも二等辺三角形である。



●＝60°のとき，正三角形である。
●＝45°のとき，直角二等辺三角形である。

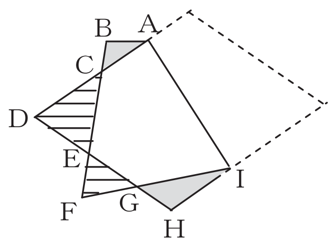
〈問題〉どのような四角形にすることができるか。



＊向かい合う辺は平行とはならないので，平行四辺形の特別なものにはなり得ない。
〈発展問題〉たこ形になるとき，もとの長方形はどのような形であるか。

§4　いろいろな問題

〈問題〉
平行四辺形を折るとき影と横線の三角形どうしは相似であるか。



（解答）
△CDE と △GFE において
∠D = ∠F（平行四辺形の対角）
∠DEC = ∠FEG（対頂角）
ゆえに，△CDE∽△GFE
△ABC と △IHG において
上より，∠DCE = ∠FGE

∠DCE = ∠ACB（対頂角）

∠FGE = ∠IGH

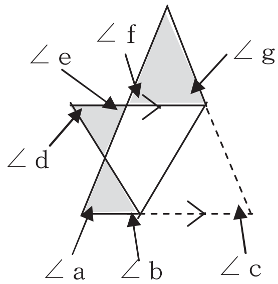
よって，∠ACB = ∠IGH

また，∠B = ∠H（平行四辺形の対角）

ゆえに，△ABC ∽ △IHG

〈問題〉

二等辺三角形を，図のように平行になるように折るとき，3つの三角形は相似であることを示せ。



（解答）

∠a = ∠c（底角）

∠c = ∠g（同位角）

∠c = ∠d（同一）

∠d = ∠b（錯角）

よって ∠a = ∠b = ∠c = ∠d = ∠g …… ①

∠a = ∠f（同位角）

∠f = ∠e（対頂角）

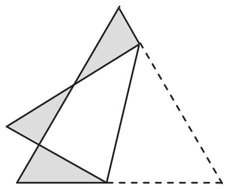
よって ∠a = ∠f = ∠e …… ②

①②より，∠a〜∠f はすべて等しい。

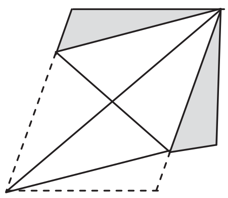
よって，3つの三角形は相似な二等辺三角形である。

〈発展問題〉

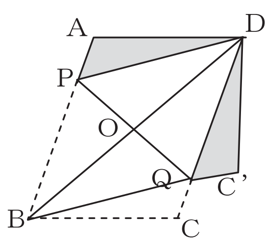
正三角形を折ると3つの相似な三角形ができることを示せ。



〈問題〉平行四辺形を図のように頂点が重なるように折ると，2つの合同な三角形ができることを示せ。



（解答）ABCD は平行四辺形で，D はPQ に関して点B と対称な点であるから，点O は対角線 BD の中点である。



したがって，O は平行四辺形の中心だから，PO = QO

よって，対角線が互いに他を二等分するので，四角形 PBQD は平行四辺形である。

よって，PD = QB …… ①，

∠PDQ = ∠PBQ

∠ADP = ∠ADC − ∠PDQ

∠QBC = ∠ABC − ∠PBQ

すなわち，∠ADP = ∠QBC …… ②

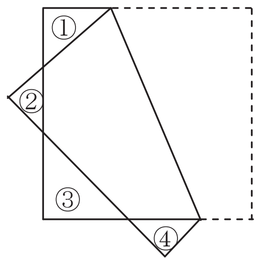
また，AD = BC …… ③

①，②，③より，△APD ≡ △CQB

△CQB ≡ △C′DQ

よって，△APD ≡ △C′DQ である。

〈問題〉①∽②∽③∽④は明らかである。さらに，①≡②とすると①≡②≡③≡④であることを示せ。



（解答）①≡②とすると，

一辺の長さは　a + b + c

左の縦の辺は　b + c + d

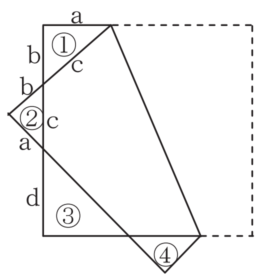
よって，d = a

したがって，②≡③

よって，③≡④である。

つまり，①≡②ならば

①≡②≡③≡④である。



〈発展問題〉対称になるには，②≡③，①≡④で十分であるが，このときも①≡②≡③≡④となることを示せ。

（解答）数学ソフトを利用して，

②≡③ならば①≡②≡③≡④

を示すことができる。

Ⅴ　関数教材（対象：高校２年以降）

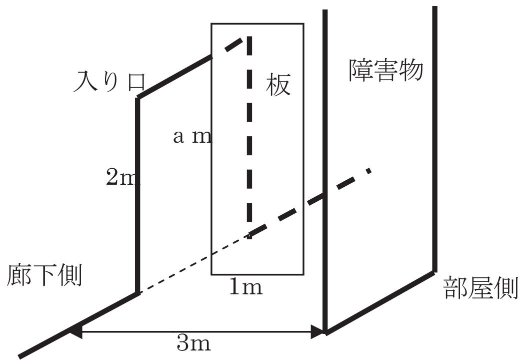
〈原題〉直方体の形をした荷物を部屋から廊下に出す。入り口の前に障害物があるとき，どれだけの大きさの荷物を，廊下に出すことができるか。

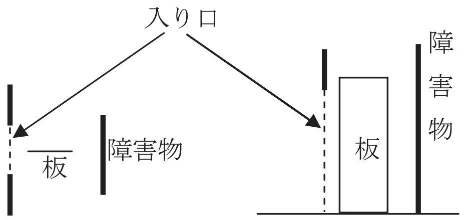
§１　長方形の板を出す

〈特殊化〉直方体の荷物を部屋から出す際，荷物の側面に着目するために，長方形の板を出すことを考える。

１．入り口から３ｍの所に障害物があるとき

障害物の高さは無限であり，入り口の高さが２ｍ，板の幅が１ｍで高さがａｍのとき，ａの最大値はいくらか。





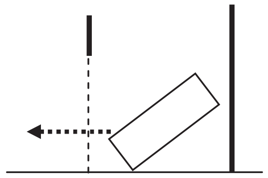
（平面図）　　（立面図）

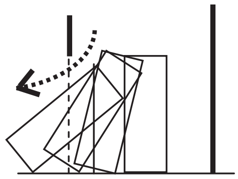
〈条件設定〉

板の出し方は，次の２つの場面に分ければよいだろう。

①部屋の中で板を傾け，その後水平に引く

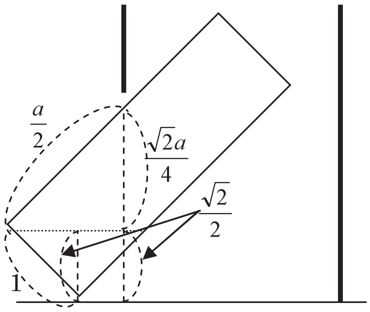
②板を傾けながら引き出す





①よりも，②の方がａを大きくすることができるだろうから，②を考えよう。

（②の解答）板の高さの半分を傾き45°で廊下に出せれば，残りは回転により全体も出せるだろう。そのときのａの値を求めると



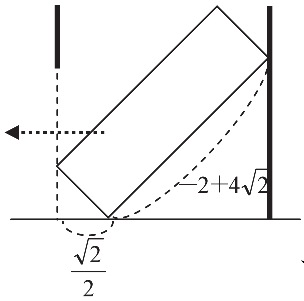
入り口の高さは

$$\frac{\sqrt{2}a}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}=2 \text{ より}$$

$$\frac{\sqrt{2}(a+2)}{4}=2$$

$$a=-2+4\sqrt{2}$$

〈参考〉板の高さの半分を傾き45°で廊下に出すには，部屋の中で45°傾けてから入り口までそのまま移動すれば良いが，そのためには，入り口と障害物の間に次のような距離が必要となる。



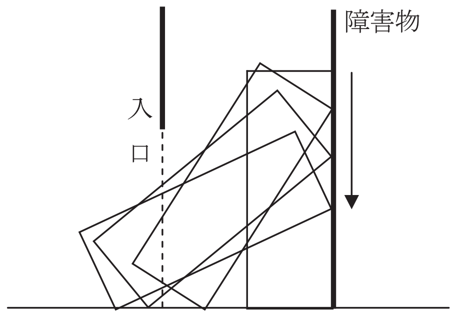
$$\frac{\sqrt{2}}{2}+(-2+4\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-2+4\sqrt{2})$$

$$=4-\frac{\sqrt{2}}{2}\fallingdotseq 3.3\ (\mathrm{m})$$

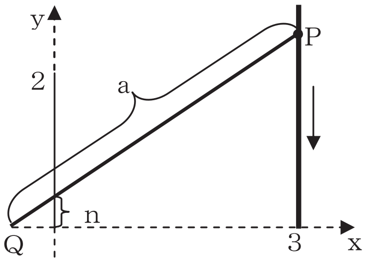
したがって，この方法ではできない。

〈発展問題〉図のように，障害物に沿いながら傾けていくとき，ａの最大値はいくらか。



§２　〈単純化〉板を通す場合は難しいので，より単純化して，長さａｍの棒を通す場合を考える。

$P(3,\ t)\ (0\leqq t\leqq a)$，$Q(s,\ 0)$ とする。



$a^2=(3-s)^2+t^2$ より

$$s=\pm\sqrt{a^2-t^2}+3$$

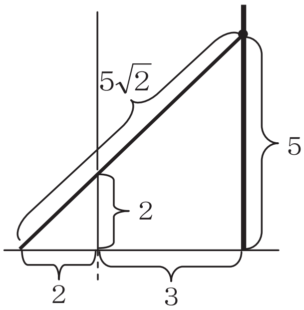
$$PQ:y=\frac{1}{3-s}(x-3)+t=\frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}(x-3)+t$$

$x=0$ のとき　$n=t-\dfrac{3t}{\sqrt{a^2-t^2}}$

$0 \leqq t \leqq a$，$0 \leqq a$ における n の最大値を求めればよい。

（予想）２変数関数なので，１変数として扱えるように，予想を立てる。すなわち，

45°で，入り口をぎりぎり通る長さ $5\sqrt{2}$ が最長であろう。



〈表計算ソフトによる実験〉

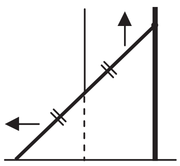
$a=5\sqrt{2}$ のときの n の変化

t	n
4.5	2.0249140580
4.6	2.0303057166
4.7	2.0310576413
4.8	2.0266636232
4.9	2.0165382483
5.0	2.0000000000
5.1	1.9762497288
5.2	1.9443429026
5.3	1.9031533940
5.4	1.8513255699
5.5	1.7872099269

$t \fallingdotseq 4.7$ で最大（$t=5$ で最大とならない）

〈解釈〉

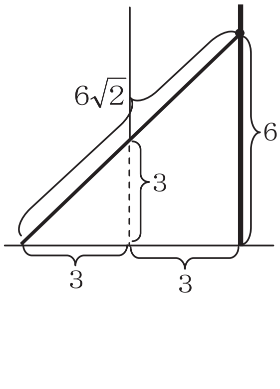
45°傾けたとき，入り口の上部が棒の中点であれば，上へ引っ張りあげるのも，下へずらすのも対称の動きが可能になるので，45°のときが最大といえるだろう。



したがって，障害物までの距離と入り口の高さが等しいときは，45°のとき，最大となる。

〈特殊化〉入り口の高さと障害物までの距離が等しい場合には，入り口の上部が棒の中点となる。

例えば，入り口の高さが３ｍであれば，棒の長さは最大 $6\sqrt{2}$ ｍとすることができる。



〈確かめ〉，

棒の長さ $a=6\sqrt{2}$（$\fallingdotseq 8.485$）として表計算ソフトで確かめると，表のように，$t=3$ で最大値６をとることがわかる。

t	n
4	2.396432549
4.2	2.491044237
4.4	2.580651107
4.6	2.664575139
4.8	2.742016978
5	2.812025128
5.2	2.873455054
5.4	2.924914058
5.6	2.964685618
5.8	2.990623476
6	3.000000000
6.2	2.989283439
6.4	2.953800839
6.6	2.887209927
6.8	2.780636928
7	2.621197305
7.2	2.389297646
7.4	2.053318135
7.6	1.558012084
7.8	0.795393221

$a=6\sqrt{2}$（$\fallingdotseq 8.64$）をわずかにずれると，入り口の高さに届かなかったり，入り口の高さにつかえることになる。

$a=8.480$ のとき

5.5	2.94363874591
5.6	2.96177573494
5.7	2.97644846745
5.8	2.98733669315
5.9	2.99407788319
6	2.99625968329
6.1	2.99341064896
6.2	2.98498877978
6.3	2.97036720578
6.4	2.94881614874
6.5	2.91947995377

a = 8.490 のとき

5.5	2.94882945049
5.6	2.96727884132
5.7	2.98229188590
5.8	2.99355203752
5.9	3.00070112281
6	3.00333194085
6.1	3.00097918456
6.2	2.99310821476
6.3	2.97910105850
6.4	2.95823878078
6.5	2.92967906274

したがって，$a = 6\sqrt{2}$ が最大値であると確認できる。ただし，この関数は $t = 6$ で対称となるような単純な関数ではない。

Ⅵ．補　　遺

本稿は，大学 4 年生のゼミで行なった内容に基づいている。ゼミでは，「原題」をもとに，問題作り，予想，検証，誤り，訂正などさまざまな活動場面があった。しかし，本稿の目的は題材としての提示であるので，ゼミの流れに沿いながら，そこでの内容を問題と解答に集約した。