# 「任意」の概念獲得過程の研究における初期課題

（教育学部数学教室）　河　村　泰　之

# Initial Problems for a study on the “Arbitrary” Conceptualization Process

Yasuyuki KAWAMURA

（平成20年６月11日受理）

## １　はじめに

論理学の基礎である一階述語論理において∀，∃の記号でよく知られるように，数学では「任意」と「ある」は議論するために非常に重要な概念であるが，その概念の獲得は難しいようである。実際，芳沢は数学における「つまずき」の16の原因を調査し，その一つに「すべての」と「ある」の用法を挙げている。実は，この「すべての」と「ある」の用法によるつまずきは，700例にものぼる［４］の調査のきっかけとなったトピックでもある。芳沢は，わが国では，この概念を中学で理解できずに他の基本的な数学の概念が身についていない高校生，大学生が多く，数学教育の将来の不安をインドの数学教育と比較して語っている。本研究では，この重要な概念に関連して任意の概念獲得に関して調査する。本稿はその最初の考察で，初期段階における課題を明確にする。

## ２　問題提起

研究の動機は，あるアルゴリズムの性能を評価するため任意性の議論が必要となり，ランダム性と任意性の関係に興味を持ったことである。背景にはランダム性と任意性の関係を議論することがあるため，どちらとも取れない表現を用いて簡易的な問題を設定する。ここでは“バラバラ”という曖昧な語を用いる。

**バラバラに点を打つ問題：**

単位正方形［０，１］$^2$の中に，$N$ 個の点を，バラバラに配置する。

### ２．１　予備実験

この問題に対して何の準備もない大学教員に，ふとこの問題を出した。図１に，そのときに打たれた点をできるだけそのままの状態を残すように再現した。ただし，そのとき周辺にあった裏紙にメモ程度で行ったため，再現は厳密ではない。

このときに感じたことを述べてもらった内容を以下にまとめる。

（ｉ）任意に点を打つこととは違うと思う。
（ⅱ）人間が打つ特徴があるのではないか。
（ⅲ）打つ人個人のクセも関係がありそうだ。

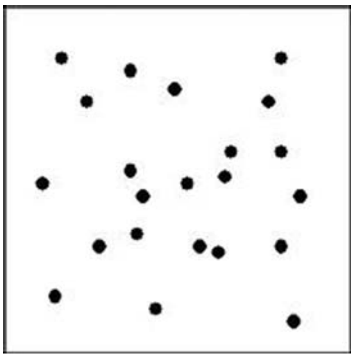

**図１：“バラバラにたくさん点を打つ”との指示だけで正方形の中に点が打たれた様子.**

本稿では（ｉ）に注目し，本研究のテーマ「任意」について考察する。（ⅱ），（ⅲ）には，別の要因も含まれると考えられるので本稿とは別に調査中であり，後に発表する予定である。

### 2．2　バラバラと任意

予備実験では問題に任意という語が含まれていないのに，否定的ながらも，感想で任意性について触れている。バラバラの概念と任意の概念には関係がありそうであることが推測できる。

もう少し詳しく説明する。任意というのは，数学的に確かな考え方であるため扱いやすいように思われる傾向にあるが，実際はかなり理想的な概念で，任意に何かを選ぶという作業は非常に難しい。ここに任意の概念の獲得が難しい一つの原因があると考えている。対して，バラバラは非常に直感的で定義が曖昧であるため学術用語としては相応しくない印象を受けるが，直感的な語は導入段階では受け入れやすいという性質を利用して数学教育に役立てようとする狙いである。

さて，実際に任意に何かを選ぶことは難しいので，古くからサイコロを例にすることが多くの分野で慣習となっている。最近では，コンピュータ上の乱数をとることで現実的に解決している。以下に，一般的に乱数と呼ばれているコンピュータ上の擬似乱数についての基礎的な説明をする。

### 2．3　擬似乱数

コンピュータで計算して乱数を発生させる。不規則な数列に見えても明らかなクセがあるので擬似乱数と呼んでいる。コンピュータで発生させる乱数の代表的なものとして，次のようなものがある。

- 一様乱数
  ある区間（範囲）に入る値が，等しい確率で出現する乱数
- 正規乱数
  出現頻度が正規分布に従う乱数
- 指数乱数
  出現頻度が指数分布に従う乱数待ち行列における客の到着間隔を求める場合に用いられる。

一様乱数を求める方法に合同式法がある。これは $x_i$ を $a$ 倍し，それを $m$ で割った余りを，次の数 $x_{i+1}$ とするのである。

**合同式法：**初期値 $x_0$，整数 $a$，$m$ を与えて，$x_1$，$x_2$，$x_3$，…なる乱数を発生させる。$x_{i+1} \equiv ax_i \pmod m$，$i=0$，1，2，…

以上の説明は［5］からほぼ引用した。実際には，もう少し複雑なことをやっているが，たいていの場合，乱数の関数はブラックボックスとして考えられ処理手順に深く触れられることはない。しかし，C言語やFORTRANで標準的に使われる乱数は性能が良くないことが知られており，現在のところメルセンヌツイスタ MT19937［6］の評判が最も良い[1]。メルセンヌ素数を利用して長い周期を実現し，また高次元に均等分布する。計算機で実現する上で，計算が十分速く（当時，最速），ビットで考えても十分ランダムであることが知られている。また，なんと言っても日本人が考案した世界に通用する技術であることがすばらしい。

### 2．4　乱数で点を打つ

ここで，メルセンヌツイスタを利用して2つの変数 $x$，$y \in [0,1]$ を $N$ 回生成し，それぞれの組 $(x, y)$ を単位正方形 $[0,1]^2$ 内に plot した図2を見てみよう。どうであろうか。受ける印象にはもちろん個人差はあるが，少なくとも図1とは違う傾向があると言えそうだ。関連がありそうだがやはり違う概念であることを確かめることで，任意性の理解を助ける方法を探る。そこで，バラバラに点を打つことと任意に点を打つことの違いを考える。次に，任意の概念の理解について考察する。

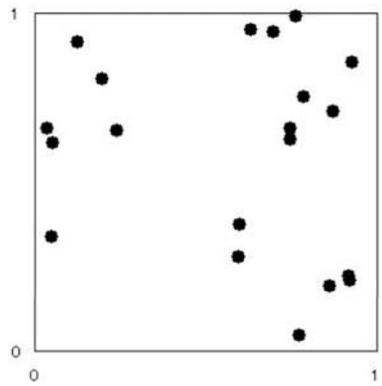


**図2：メルセンヌツイスタによるランダムな点の plot．（$N$＝20）**

[1] 改良版 SFMT は，新しいのでまだそれほど広まっておらず，評判はあまり聞かない。

## 3　概念形成の調査方法の検討

### 3．1　概念形成の段階

理解の水準や概念形成の段階を一般的に述べると，ある特定の意見に対しては異論も多くなりがちで，理想的なモデルを明快に述べるのが難しい。これまでに良く考えられたモデルが数々提案されているが，合理的なモデルを構築するには多くの議論が必要になるので本研究ではまずは次に示すように三段階からなる簡単なモデルから出発し，後の研究で発展させる。

1．概念がわからない段階
2．概念は持っているが，それを応用できない段階
3．概念がわかり，それを適切に応用できる段階

応用というのは，実際にその概念を活用することかもしれないし，他人に概念を説明するとき数学的に定義できていることかもしれない。概念を持っていない者（1.）が，何か概念を得た（2.）だけでは内面的な変化なので客観的に評価できない。しかし，それを外に応用できる（3.）ようになると試験などで判断できるようになることから，この単純な段階を設定した。

本研究では，まず「任意」の理解が1.もしくは2.の段階である者を対象に概念形成の過程を調査する。言い換えれば，厳密には概念獲得の過程ではなく，獲得した者が外に表現する過程（2.から3.の変化）を調査する。

すでに概念を獲得していることがわかっている対象者であるなら，2.以降はより詳細に分類して調査すべきだろう。例えば小山は Wittmann の分類［1］を参考に，数学理解のモデルを調査している［7］。小山によれば，学習段階に関する理解度の水準は次の3つの学習段階からなるとしている。これらは必ずしも直線的ではないが，理解の水準となっているとも述べている。

（1）直感的段階（Intuitive Stage）
　　学習者が具体物あるいは概念や性質などの数学的対象を操作する，直感的思考（Intuitive Thinking）を働かせる段階である。
（2）反省的段階（Reflective Stage）
　　学習者が自らの活動や操作に注意を向け，それらやその結果を意識化して，図や言葉などによって表現することを目的とする，反省的思考（Reflective Thinking）を働かせる段階である。
（3）分析的段階（Analytical Stage）
　　学習者が表現したものをより洗練して数学的に表現したり，他の例で確かめたり，それらのつながりを分析したりすることによって，統合を図ることを目的とする，分析的思考（Analytical Thinking）を働かせる段階である。

今後は，任意の概念を理解する段階もこのような水準を参考にしてモデル化していく必要がある。

### 3．2　二重分類課題

任意の概念獲得過程を研究するため，3．1節で理解の段階を仮定し，まずは2.から3.の段階の変化を調査することにした。現在の算数・数学教育のどの部分が任意の概念と関係が深いか調べるために，小学校から大学の幅広い層で任意に関して2.から3.の変化を調査する。この節では調査を行うため具体的に選定した課題を解説する。本研究でまず取り組むのは，バラバラに点を打つことと任意に点を打つことの2つの関係を考えさせる課題を設定することである。点の配置からだけでは区別がつきにくいこの2つの概念を，あえて分類する課題により，任意性を議論する動機を与えるのが狙いである。

**二重分類課題：** 3つの性質 $p$，$q$，$r$ から2つ $p$，$q$ をとりあげ，それぞれの性質を満たすか満たさないかを分類する。

実際には，図3のようなマトリクスを作る課題になる[2]。$p$，$q$，$r$ のどの2つを選ぶかで3通り考えることができるが，どれか1つ（いまの場合 $r$）を無関係にすることが決まっている場合は，少し簡易な分類課題となる。（［3］ではマトリクス課題と呼んでいる。）ちなみに，年少児には二重分類はかなり難しいことが知られているので十分成長した被験者が求められる。

この分類課題には2つの方法が知られている。すなわ

[2]著者は［3］から得たが，オリジナルはどこか他にあるかもしれない。

| | $p$ | $\bar{p}$ |
|---|---|---|
| $q$ | $p \wedge q \wedge r$ | $\bar{p} \wedge q \wedge r$ |
| $\bar{q}$ | $p \wedge \bar{q} \wedge r$ | $\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r$ |

**図３：二重分類課題で作るマトリクス.**

ち，自発的分類と誘導的分類である。自発的分類を調査するときには，分類の枠組みだけを与え，対象を自由に分類させる。誘導的分類の場合は，枠組みを与えるところは同じであるが，パターンが類推できるような代表的なもの，または他と比較すれば規則性が発見できるようなものを最小の数だけあらかじめ枠の中に分類しておく。どちらが良いかは調査するテーマによって決まる。

本研究で行いたい調査を具体的に考えてみよう。単位正方形内に打たれた $N$ 点の集合を考え，バラバラに打たれている場合 $p$ で表し，任意に打たれている場合 $q$ とする。$r$ は，他に可能性のある要因と考えると二重分類課題が適切なモデルであることがわかる。どちらの概念も明確でない者を対象に概念獲得過程を研究するのだから，誘導的であるのは好ましくない。自発的な二重分類課題とするのが良いだろう。

分類する際，対象者に点を打っている様子（順序など）を見せることは「任意」の概念に関わってくることが考えられるが，二重分類課題で調査するのは時間の問題から不適当であろう。このことについては，将来の課題とする。

## 4　おわりに

「任意」の概念が非常に重要であることは全ての数学者，数学教育者が合意するところであるが，芳沢の指摘からわかるように，わが国では概念教育が徹底されていない。原因の一つは，非常に理想的なことを述べていて，それでいて例に示すことが難しいところにある。本稿ではバラバラという曖昧な概念を利用することによって，対比的に任意の概念を獲得できるというアイディアの下，概念形成の段階と概念獲得を意識した議論の動機付けを提案した。

バラバラを「まんべんなく」という意味で捉えれば，任意で選ぶ方法とは異なり，「まとまりがない」という意味で捉えれば，任意という意味と共通部分が大きくなる。

今後は教育現場で実践的に調査を行うが，任意の概念を真に獲得したか確かめる理想的な方法はわかっていない。バラバラに点を打つ問題で調査を続けると，議論のためには点の配置に定量的な評価が求められることになるが，例えばエントロピーはランダムネス，不規則性あるいは混乱度を示す代表的な指標の一つである。他にもいくつかの指標が考えられるが，実際に計測するためにはもう少し議論が必要である。

単なる言葉遊びにならないよう，専門的知識に関して今後も継続的に調査する。

## 参考文献


［１］Wittmann, E., “The Complementary Roles of Intuitive and Reflective Thinking in Mathematics Teaching”, Educational Studies in Mathematics, Vol.12，pp.389－397（1981）.

［２］Pirie, S. & Kieren, T., “A Recursive Theory of Mathematical Understanding”, For the Learning of Mathematics, Vol. ９，No. ３，pp. ７－11（1989）.

［３］杉原一昭,『論理的思考の発達過程』, 田研出版（1989）.

［４］芳沢光雄「算数・数学つまずきの分類」『日本数学教育学会誌 Vol.88 No. ３』，pp.24－28（2006）.

［５］小島辰一,「乱数」,『CREDER 中学校数学科教育実践講座』，第16巻，pp.208－209（1994）.

［６］Matsumoto, M. & Nishimura, T., “Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator”, ACM Trans. on Modeling and Computer Simulations, Vol. ８，No. １，pp. ３－30（1998）.

［７］小山正孝，“数学学習における理解過程に関する研究（Ⅰ）－中学校第２学年「星形多角形の研究」の授業を事例として－”，全国数学教育学会誌数学教育学研究，第12巻，pp.71－81（2006）.