愛媛大学教育学部紀要　第63巻　189～198　2016

『数学作りの授業』のための題材例（その３）

－包装の数理－

（数学科教育研究室）藤　本　義　明

Materials for 'Class through Making Mathematics' (3)

－Mathematical Meaning of 'Covering Goods'－

Yoshiaki FUJIMOTO

（平成 28 年　7 月 28 日受理）

キーワード：数学作り、包装、数理

Ⅰ　はじめに

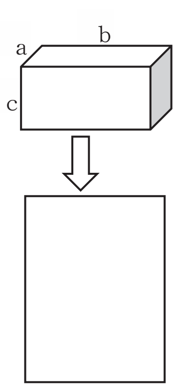
「数学作りの授業」を行うための教材として、これまでの２報において、さまざまな例を紹介してきた。本稿はその第３報として、物を包装する手段に着目して、「袋に入れる」、「ひもをかける」、「紙で包む」過程に存在する数理を明らかにして、教材化の一助としたい。対象の学年は、すべてを完璧に指導する際は高校２年生くらいが想定されるが、「ひもをかける」と「紙で包む」は中学校３年生に指導できる内容である。

Ⅱ　袋に入れる

マチがない袋に直方体（立方体）の形の荷物を、荷物が外から見えなくなるまで完全に入れる。このとき、袋の縦、横の長さをできるだけ小さくしたい。ただし、荷物について、辺の長さを右図のように定める。

（縦）＝ａ、（横）＝ｂ、

（高さ）＝ｃ



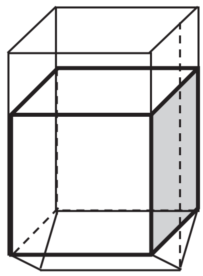
１．１辺がａの立方体の荷物を袋に入れる

(1)箱の袋への納まり方を予想する

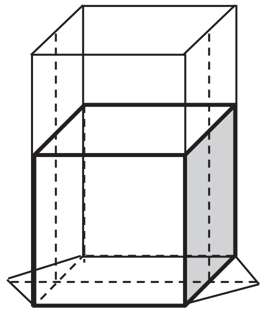
①袋への納まり方

横はぴったり袋に入ったとき、袋の縦の長さを最小にすると、底はどこまで入るのだろうか。

（予想１）底がぴったり付かないのではないか。

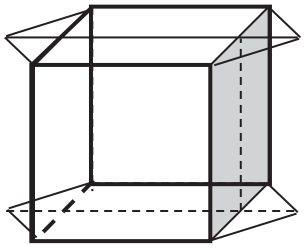


（予想２）底にぴったり付くのではないか。



＊実際にやってみると、予想２の状況は可能であり、袋の縦の長さを最小にできる。

上側も底と同じ形状になる。



（袋の横）＝（ａ×４）÷２＝２ａ

（袋の縦）＝ $\frac{a}{2}+a+\frac{a}{2}=2a$

よって、最小の袋は、縦、横ともに ２ａ である。

②耳の形

余りの三角（耳）の形は直角二等辺三角形のようである。このことを証明する。

（証明）

側面がぴったり袋におさまるので

袋の底辺ＡＣは２ａ

$$BC=(2a-a)\div 2=\frac{a}{2}$$

$$BD=a\div 2=\frac{a}{2}$$

よって、ＢＣ＝ＢＤ

また、角度は袋の前後２枚で袋のカドの角度

９０°×２に等しいので、９０°である。

したがって、耳の形は、直角二等辺三角形である。

２．直方体を袋に入れる

⑴ 袋の縦、横の長さが最小

一般に、直方体を袋に入れるとき、最小の袋は次のようになる。

（袋の横の最小値）

$$(a+b)\times 2\div 2=a+b$$

（袋の縦の最小値）

ア：ｂが袋の入口と平行なとき

$$\frac{a}{2}+c+\frac{a}{2}=a+c$$

イ：ａが袋の入口と平行なとき

$$\frac{b}{2}+c+\frac{b}{2}=b+c$$

⑵ 袋の周囲の長さが最小のとき

袋を最小にするとき、袋の周囲の長さが最小になるのは次のときである。

ア：ｂが袋の入口と平行なとき

$$((a+b)+(a+c))\times 2=4a+2b+2c$$

イ：ａが袋の入口と平行なとき

$$((a+b)+(b+c))\times 2=2a+4b+2c$$

つまり、４倍となる辺をなるべく小さくする必要がある。

（手順）

ⅰ)最短の辺を見つける（ａとおく）

ⅱ)最短の辺袋の縦と垂直に保ちながら、袋に入れる

このとき、袋の周囲は、４ａ＋２ｂ＋２ｃであり、これが最小である。

⑶ 袋の表の面積が最小

袋を最小にするとき、袋の表の面積が最小になるのは次のときである。

ア：ｂが袋の入口と平行なとき

$$(a+b)\times(a+c)=a^2+ab+ac+bc$$

イ：ａが袋の入口と平行なとき

$$(a+b)\times(b+c)=b^2+ab+ac+bc$$

よって、⑵と手順は同じでよい。

（手順）

ⅰ)最短の辺を見つける（ａとおく）

ⅱ)最短の辺袋の縦と垂直に保ちながら、袋に入れる

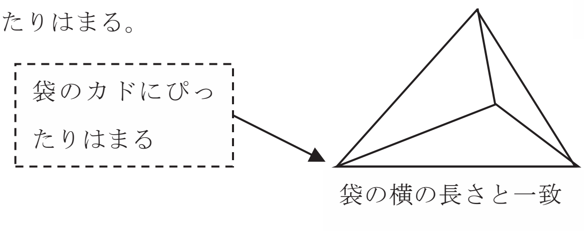
＜疑問＞立方体のカドを、袋のカドに押し入れることができない理由は何か。

（解答）袋のカドが作る角度は ９０°×２ である。

一方、立方体のカドは、全部で ９０°×３ の角度であるから、立方体のカドは袋のカドとぴったりはまることはない。

＊ｎ面がつくるカドが袋のカドにぴったりはまるのは、面の１つの角度が $\frac{180°}{n}$ のときである。

＊とくに、３面がつくるカドでは、６０°の角をもつ面がぴったりはまるので、正四面体のカドは袋のカドにぴったりはまる。



＜さらなる疑問＞

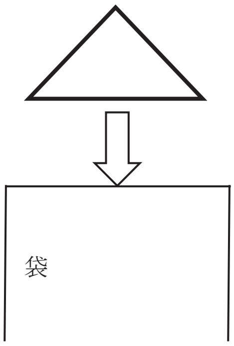
正四面体では、ひとつのカドが袋のカドにぴったりはまるのだから、もう一方のカドも袋のカドにぴったりはまり、正四面体の１辺の長さは袋の横の長さと同じになるだろう。

３．正四面体を袋に入れる

正四面体を袋に入れると、カドが袋にぴったりはまることがわかった。では、正四面体を入れることができる最小の袋はどうなるのかを考える。

辺の長さが a である正四面体を、１辺が袋の横と平行で、立面図が二等辺三角形になる状態から、袋に入れる。

（立面図）



(1) 口をしぼる考え

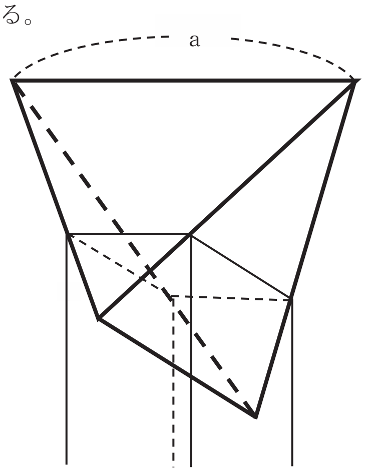
（考えられる予想）

＊袋の横の長さが a とき、巾が a の紙切れなら入れられるが、四面体のように厚みがあると入らないのではないか。

＊立方体のときよりも、もっと複雑な耳ができるのではないか。

（考え方）

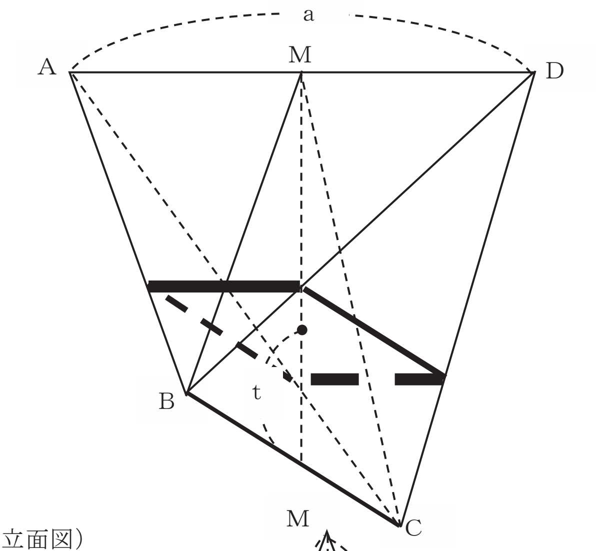
＊袋に少し入れた後、袋をしぼって、袋の口の最小の大きさを考える。



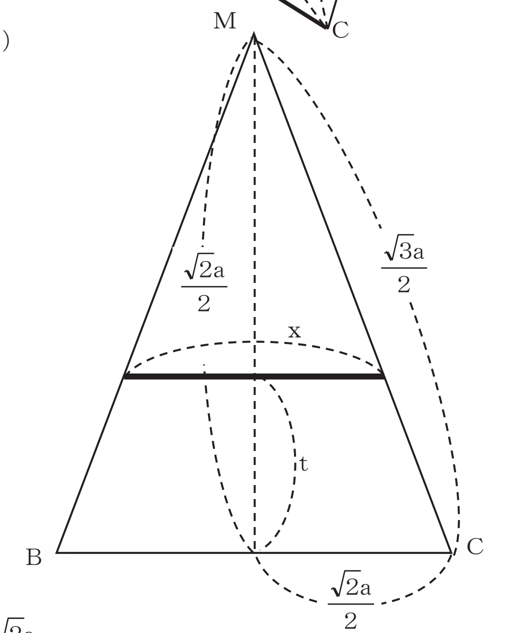
＜実験＞袋の横の長さが a より数ミリ長ければ、入りそうだ。

＊袋の中に t だけ入れたとき、切断面の周囲（袋をすぼめる最小値）はいくらか？

見取り図

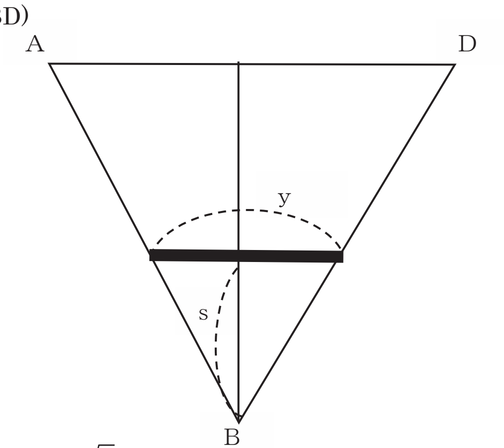


（立面図）



$\frac{\sqrt{2}a}{2}$ ： $\frac{\sqrt{2}a}{2} - t = a : x$ より、　$x = a - \sqrt{2}\ t$

(面 ABD)



$a : y = \frac{\sqrt{3}a}{2} : s$ 　よって　$y = \frac{2}{\sqrt{3}} s$

$$s : \frac{\sqrt{3}a}{2} = t : \frac{\sqrt{2}a}{2} \quad \text{より} \quad s = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ t$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ t = \sqrt{2}\ t$$

したがって、切断面の周囲は

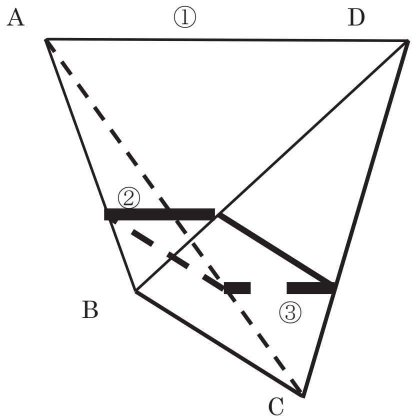
$$2 \times (x + y) = 2 \times (a - \sqrt{2}\ t + \sqrt{2}\ t)$$
$$= 2a \quad \text{（一定）}$$

＊入り口が入ると、切断面の周囲は一定なので、そのまま入っていく。

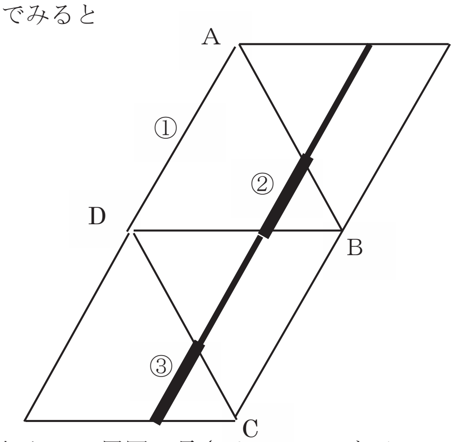
⑵　展開図による考え

袋の入り口を、四面体の切り口と考える。

①②③の線分は平行である



よって展開図でみると



したがって、切り口の周囲の長さは、２ａである。

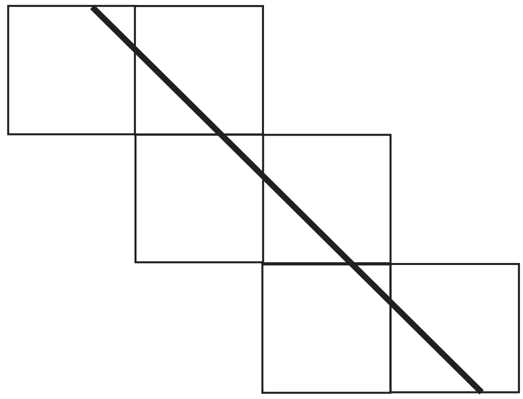
４．他の立体

展開図で、切り口が一直線になることは、他の立体でも考えられるので、他の立体の場合を考えてみる

⑴　立方体の場合

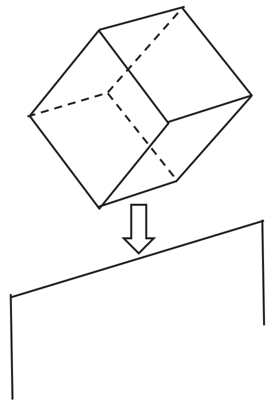
辺に対し、４５°の角度の切り口を考えると、切り口の周囲は、正方形の対角線の、常に３倍である。

（展開図）



このような状況が起こるのは、立方体を４５°傾けて袋に入れる場合である。

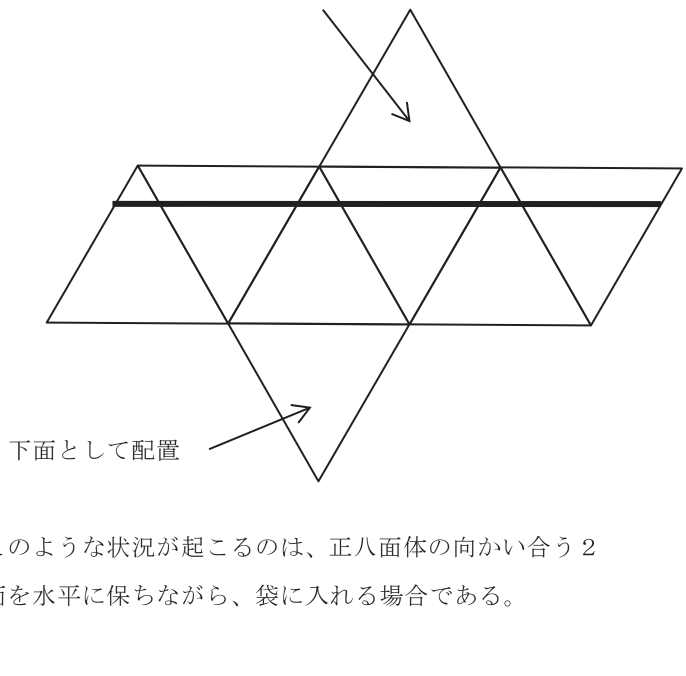
（見取り図）



⑵　正八面体の場合

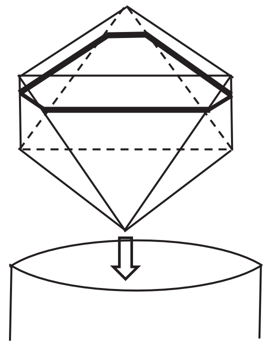
下図のような切り口にすると、切り口の周囲は、辺の長さの３倍である。

（展開図）　　上面として配置

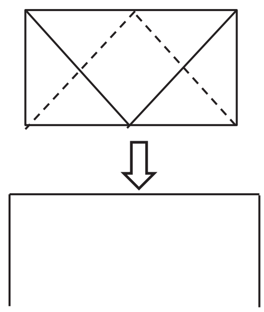


このような状況が起こるのは、正八面体の向かい合う２面を水平に保ちながら、袋に入れる場合である。

（見取り図）



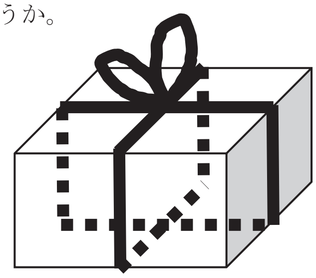
（立面図）



Ⅲ　ひもをかける

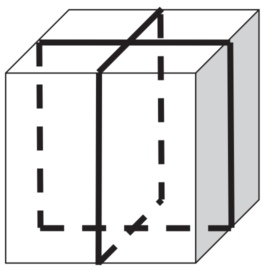
1　垂直にひもをかける

直方体の箱に、ひもをかける。ひもの長さはどれだけ必要だろうか。



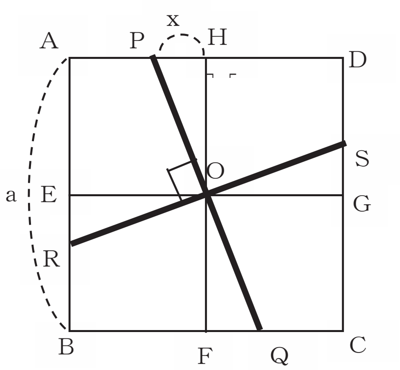
(1)　立方体の箱

１辺が a の立方体の箱に対して、ひもを十字に垂直に交わるようにかける。



このとき、必要なひもの長さは、箱の高さの４本分はいつも同じであり、また、上面と下面も同じだから、上面のひもの長さだけを考えることにする。

ｉ）　ひもの交点が中心Oにあるとき



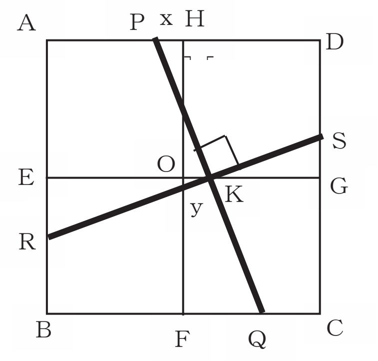
ひもの端Pが辺の中点Hと x だけ離れると、

$$(\text{ひもの長さ}) = 4 \times \mathrm{PO}$$

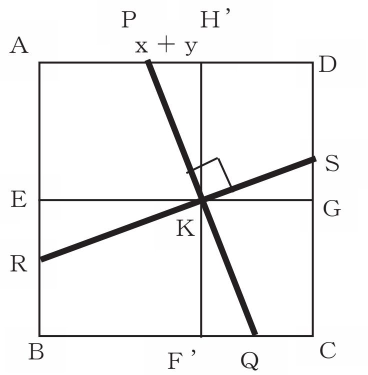
$$= 4 \times \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= 2\sqrt{4x^2 + a^2} \qquad \left(0 \leqq x \leqq \frac{a}{2}\right)$$

さらに、交点Kが横に y ほど動いたとき、つまり、KがＥＧ上で、ＫＯ＝ y であるときを考えてみる。



Kと交わる鉛直線をＨ’Ｆ’とする。



ＰＨ’＝ x ＋ y より

$$\mathrm{PQ} = 2 \times \mathrm{PK} = 2\sqrt{(x+y)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4(x+y)^2 + a^2}$$

$$\mathrm{EK} = \frac{a}{2} + y,\quad \mathrm{GK} = \frac{a}{2} - y \text{ より}$$

$$\mathrm{RK} = \mathrm{PK} \times \frac{\frac{a}{2} + y}{\frac{a}{2}} = \mathrm{PK} \times \frac{a + 2y}{a}$$

$$\mathrm{SK} = \mathrm{PK} \times \frac{\frac{a}{2} - y}{\frac{a}{2}} = \mathrm{PK} \times \frac{a - 2y}{a}$$

よって、ＲＳ＝ＲＫ＋ＳＫ

$$= PK \times \frac{a+2y}{a} + PK \times \frac{a-2y}{a}$$

$$= 2PK = PQ$$

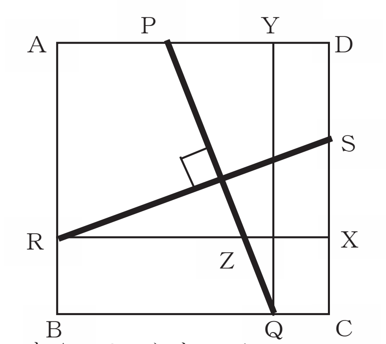
つまり、交点を横に移動させても、常に

ＰＱ＝ＲＳ（$=\sqrt{4(x+y)^2+a^2}$）である。

このことの別証明を考えてみる。

（別証明１）

辺と平行に ＱＹ、ＲＸを引く。



△ＰＱＹと△ＲＳＸにおいて

　∠ＰＱＹ＝∠Ｒ－∠ＸＺＱ

　　　＝∠Ｒ－∠ＰＺＲ＝∠ＳＲＸ

　ＱＹ＝ＲＸ

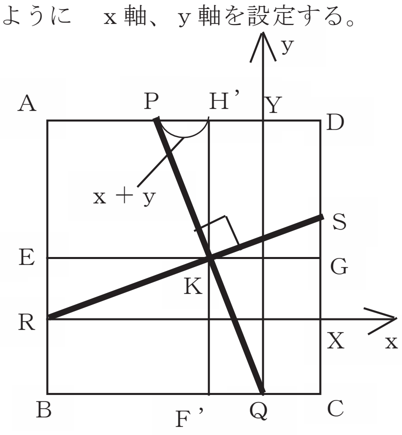
　２角と間の辺が等しいので

　　△ＰＱＹ≡△ＲＳＸ

　よって　ＰＯ＝ＲＳ

（別証明２）

下図のように　ｘ軸、ｙ軸を設定する。



$x+y=\dfrac{PY}{2}$　より　　$PY=2(x+y)$

(ＰＱの傾き)×(ＲＳの傾き)＝－１　より

$$\frac{-\frac{a}{2}}{x+y} \times \frac{SX}{a} = -1$$

$$SX = 2(x+y)$$

よって、ＰＹ＝ＳＸ

したがって、２辺と間の角が等しいので

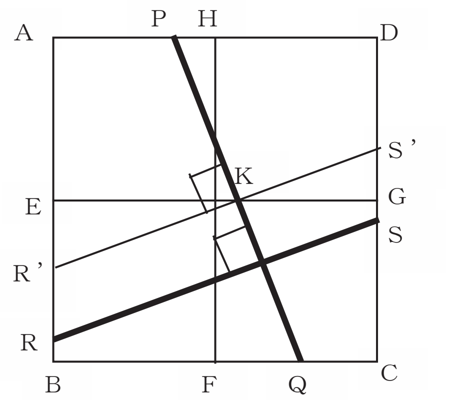
　　△ＰＱＹ≡△ＲＳＸ

　よって、ＰＱ＝ＲＳ

　今、交点Ｋを横に移動させたら、ＰＱ＝ＲＳであることがわかった。それでは、交点Ｋをどのように移動させても、ＰＱ＝ＲＳが成り立つのではないか、ということが予想できる。このことを証明する。

（定理）正方形において、対辺を結ぶ２本の線分が直行するとき、２線分の長さは等しい。。

（証明）ＲＳと平行で、ＥＧと交わる線分Ｒ’Ｓ’を引き、ＥＧとの交点をＫとする。



　今、四角形ＲＳＳ’Ｒ’は平行四辺形だから

　　　ＲＳ＝Ｒ’Ｓ’

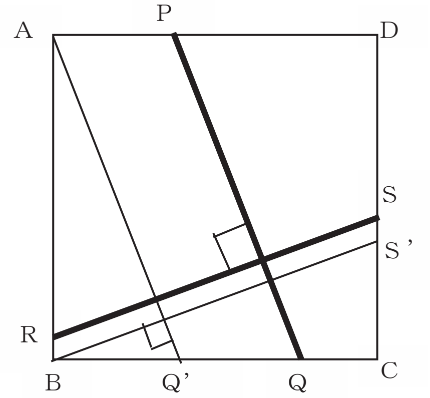
　Ｒ’Ｓ’は直前に証明した性質を満たしているので

　　　Ｒ’Ｓ’＝ＰＱ

　したがって、ＰＱ＝ＲＳ　である。

（別証明）ＰＱの平行線ＡＱ’と

　　　ＲＳの平行線ＢＳ’を引く。



∠ＢＡＱ’＝∠Ｒ－∠ＡＱ’Ｂ

＝∠ＣＢＳ’

よって、２角と間の辺の長さが等しいので

△ＢＡＣ’≡△ＣＢＳ’

したがって、ＡＱ’＝ＢＳ’

よって、ＰＱ＝ＲＳ

⑵　直方体の箱

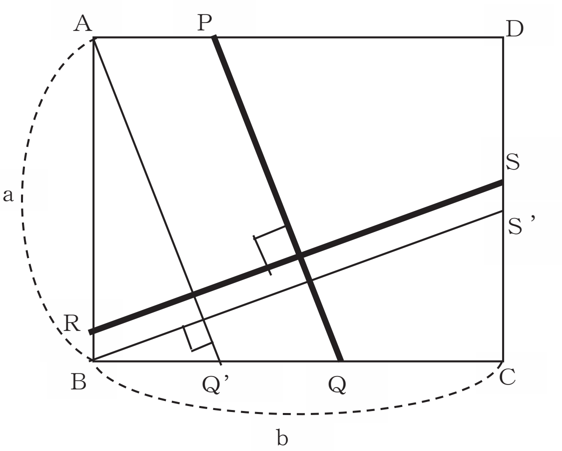
一般に、直方体の箱でひもを十字に直交してかける場合は、どのような性質があるか考える。

直前の証明方法を参考にすると、直方体の場合は、相似な直角三角形が考えられので、辺の長さの比としてとらえることができる。

（定理）縦：横＝ａ：ｂである長方形において、対辺を結ぶ２本の線分が直行するとき、２線分の長さの比はａ：ｂである。

（証明）ＰＱの平行線ＡＱ’と

ＲＳの平行線ＢＳ’を引く。



∠ＢＡＱ’＝∠Ｒ－∠ＡＱ’Ｂ

＝∠ＣＢＳ’

よって、２角が等しいので

△ＢＡＣ’∽△ＣＢＳ’

したがって、ＡＱ’：ＢＳ’＝ＡＢ：ＢＣ

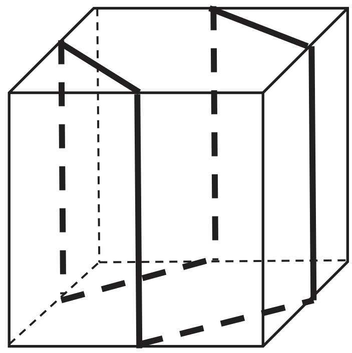
よって、ＰＱ：ＲＳ＝ａ：ｂ

２　一周してひもをかける

⑴　立方体の箱

１辺がａの立方体の箱を一周するように（下面と上面だけ２回ひもがかかる）ひもをかける。

図のように、ひもは上面の正方形の各辺の中点を通り、」側面では上面に対して垂直にかかるとする。

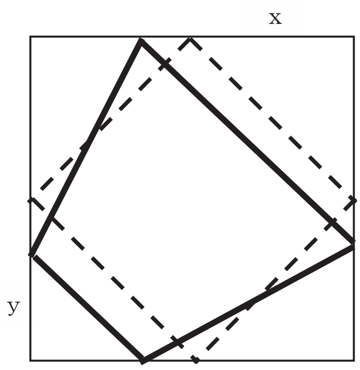


このとき、ひもの長さは

$$\frac{\sqrt{2}a}{2}\times 4+a\times 4=4a+2\sqrt{2}a$$

である。

では、この状態から、ひもの全体の長さは変えないで、上面のひもを平行に移動させることはできるだろうか。側面の４本のひもの長さは変わらないので、辺上で、ひものかかる位置を図のように、ｘ、ｙとすると



A’

$$x\sqrt{2}+y\sqrt{2}+\sqrt{(a-x)^2+(a-y)^2}\times 2$$

$$=2\sqrt{2}a$$

$$2\sqrt{(a-x)^2+(a-y)^2}$$

$$=2\sqrt{2}a-x\sqrt{2}-y\sqrt{2}$$

$$8a^2-8ax-8ay+4x^2+4y^2$$

$$=8a^2+2x^2+2y^2-8ax+4xy-8ay$$

$2x^2-4xy+2y^2=0$　　　$2(x-y)^2=0$

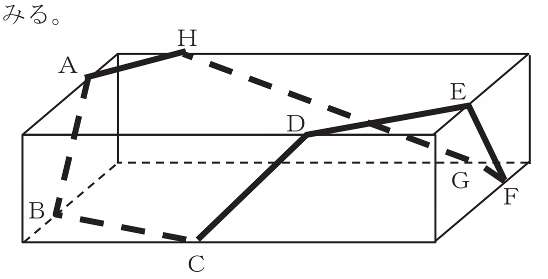
よって、$x=y$

したがって、ひもの全体の長さを変えないで、ひもの位置をずらすことはできない

(2)　直方体の箱

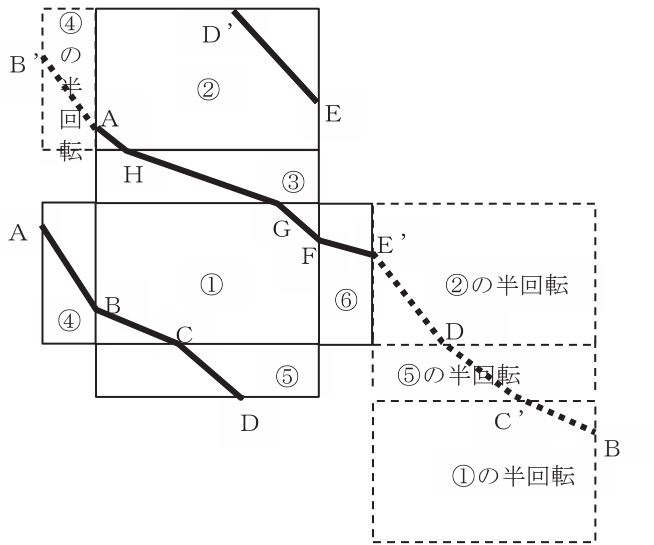
　側面のひもを底面に対して垂直にした状態では、上面と下面のひもを平行にずらすことはできなかった。

　では、側面のひもが垂直でないときには、ひもの全体の長さは変えないで、上面と下面にかかっているひもを平行にずらすことはできないのであろうか。また、ひもを一周してかけるとき、ひもの長さを最小にするにはどうしたらよいのだろうか。一般に、直方体の箱で考えてみる。

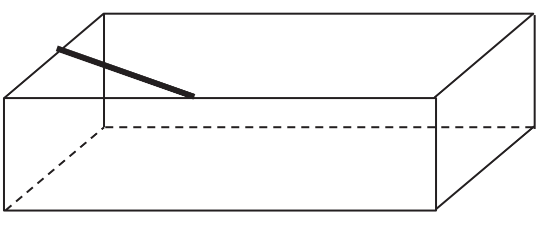


ひもがかかっているようすを展開図で表すとつぎのようになる。

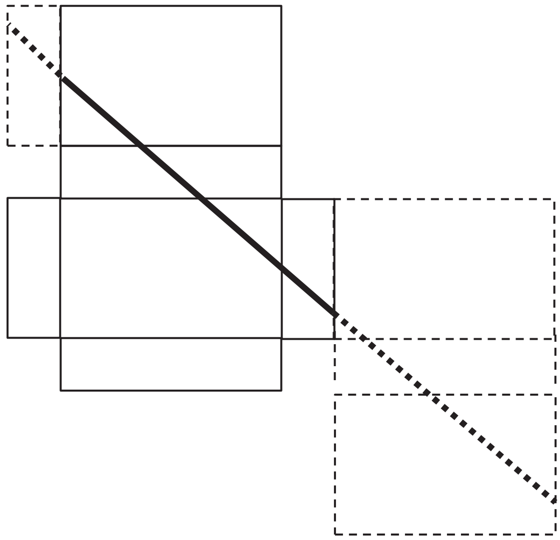
ひもを１本につなげるために、①、②、④、⑤の面の位置を動かして表現する。



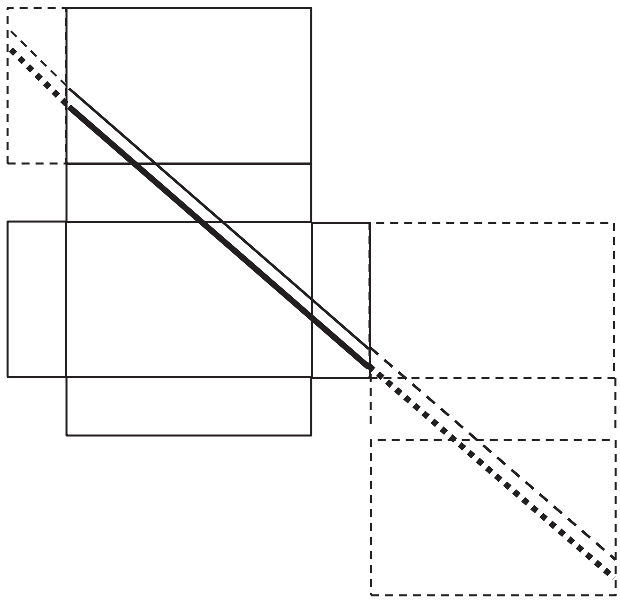
　この表現を使うと、直方体の上面でのひもをかける位置が与えられたとき、全体のひもの長さを最小にするひものかけ方を見つけることができる。



与えられたひもの位置を延長して直線をひくことができれば、それが最短のかけ方を示す。



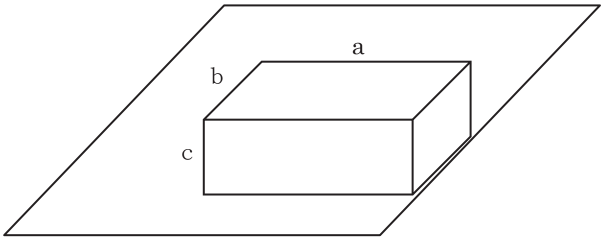
また、直線で表されるかけ方に対しては、直線を平行移動することにより、全体の長さは変えずに、ひもを平行にずらすことができる。



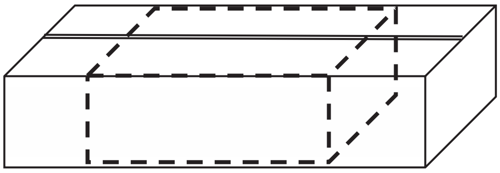
Ⅳ　紙で包む

１．平行に包む

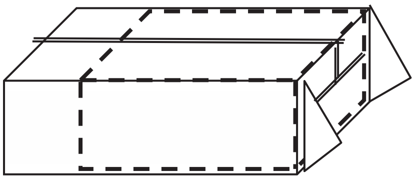
　たて a、横 b、高さ c の直方体の箱を、箱と包装紙の辺が平行になるように置いて包む。箱の表面をすべて包装紙で覆い、なるべく包装紙のたて、横をを小さくしたい。



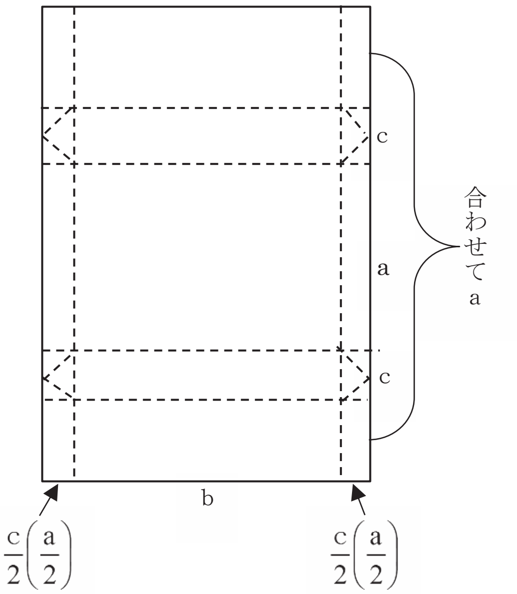
最初に包装紙で巻くと筒状になる。



次に、空いた部分を閉じると、Ⅱの箱をマチの無い袋に入れたのと同じ状態になり、直角二等辺三角形の耳ができる。



結局、Ⅱのマチの無い袋に入れる場合と同じ結果になる。ただし、包装紙の縦、横はそれぞれ袋の横、縦に相当し、包装紙は袋の表裏を合わせた大きさである。

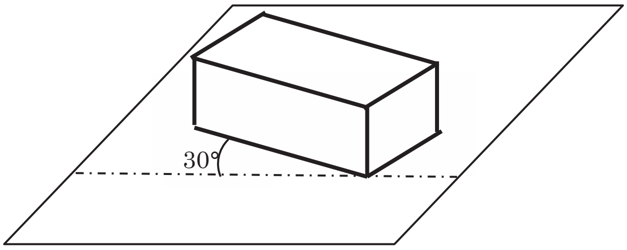


（縦）＝(ａ＋ｃ)×２＝２ａ＋２ｃ

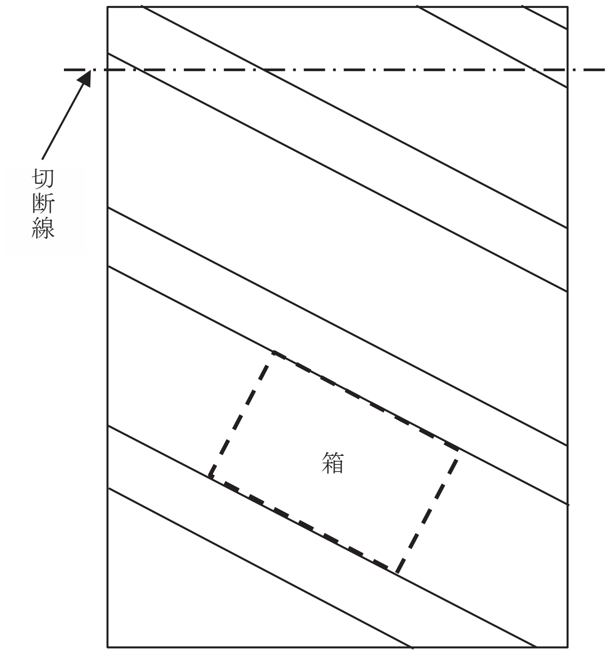
（横）＝ｂ＋ｃまたは　ｂ＋ａ

２．斜めに包む

たてａ、横ｂ、高さｃの直方体を、包装紙の横に対して３０°斜めに置いて包む。



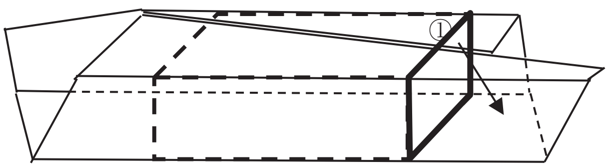
＜折り目＞



包んだときの折り目は同じ位置で何重にも重なり合う。つまり。包装紙の縦を小さくするように切断したとき、外側の紙が欠けても内側の紙が補うことができる。切断線を下げても、内側の紙が補う。しがたって、内側の紙が補うことのできる切断線の最も低い所が、包装紙の縦の最短である。

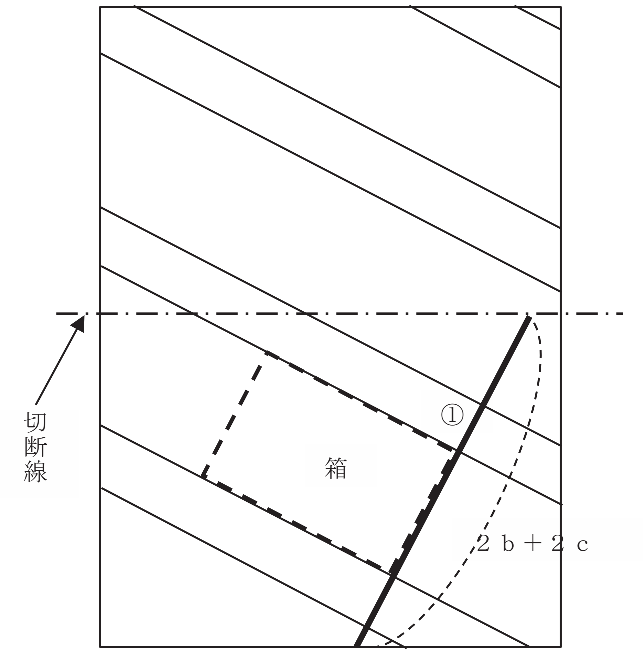
(1)　縦の最小値

[問]　たて方向へ包むとき、包装紙のたての長さの最小値はいくらになるか。



箱を１周ぐるりと巻いたときが、縦の最小である

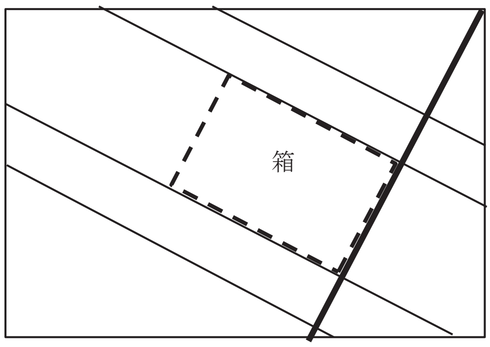
例えば、端の周囲①が１周巻かれるのは、下の図のときである



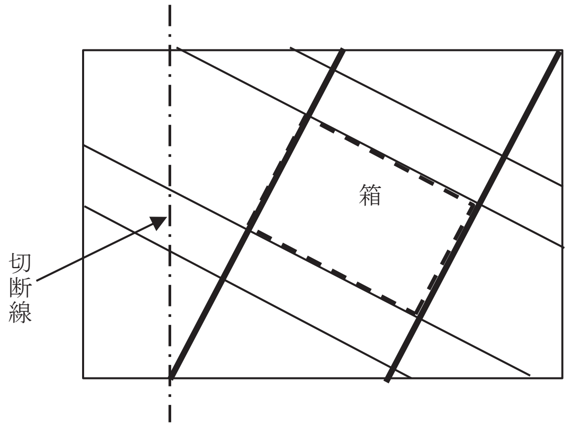
$$（縦の最小値）＝(2b+2c)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}(b+c)$$

(2)　横の最小値

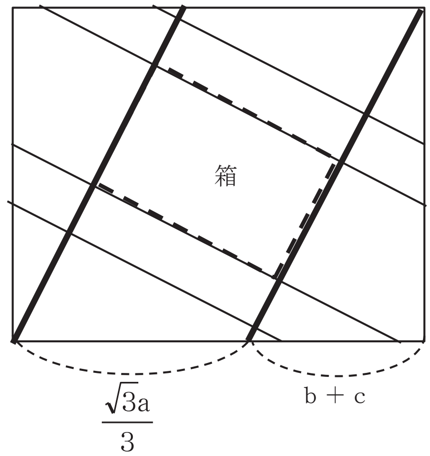
包装紙は箱を１重に巻いた筒状になり、箱は筒の中を自由に動く。次に、右端を処理するには、箱をなるべく右に移動させる方が、余分が少なくて済む。そこで、箱の右端が一周されるもっとも右の位置まで、箱を移動させる。



同様に、左端も箱の左端が一周される状態で、包装紙の左を切り詰める。



したがって、包装紙の横の最小値は



$$（横の最小値）＝\frac{\sqrt{3}a}{3}+b+c$$

＜注意＞　ここでは、包装紙の横の長さを決めるのに、箱の左右の端が包装紙に巻かれる位置を設定した。しかし、箱を紙が覆うという条件においては、さらに包装紙の横を短くすることは可能である。その場合、折り方が複雑になり、通常の包装紙の折り方とはかけ離れたものになるので、本稿では割愛した。