愛媛大学教育学部紀要　第72巻 74-79 2025

情報教育の視点からみた多表象統合型数学授業の設計と実践

（数学教育講座）河村 泰之

Design and Practice of Multi-Representation Integrated Mathematics Lessons from the Perspective of Informatics Education

Yasuyuki KAWAMURA

（2025 年 9 月 1 日受付、2025 年 11 月 27 日受理）

［**要約**］本研究の目的は、概念型学習の観点から、式・表・グラフの三表象をプログラミングを媒介として関連付けながら扱う学習過程を設計・実践することである。対象は「速さ・時間・距離」の数量関係であり、追いつき問題を題材に、プログラムを用いて数値を生成し表として確認し、さらにグラフとして可視化する活動を構成した。分析の結果、学習前は表への依存が強く、式・グラフとの対応づけは限定的であった一方、学習後には三表象の対応づけが進み、数量関係の捉え方が再組織化されつつある兆候が確認された。これは、数学で形成されつつあった理解がプログラムの表現環境で再解釈され、再び数学に再適用される往還としての転移が生起したことを示す。

［**キーワード**］プログラミング教育 Programming Education、概念型教育 Concept-based Learning、表象理論 Representation Theory

Ⅰ．序論

本研究は、Erickson (2007) が提唱する概念型学習（concept-based learning）を理論的基盤とし、Bruner (1966) の三表象理論を統合的に扱うことを目指した学習過程を、プログラミングを媒介とする活動として設計することを目的とする。

プログラミング教育は小学校で必修化され、高校では大学入学共通テストに出題されるなど、全国的な広がりを見せている。しかし、中学校段階ではプログラミングを使う具体的な場面が想定されていないため、学習活動が単発化する問題が指摘されており、各教科と連携した授業づくりが課題となっている。その中で数学は、論理的思考やデータ処理、関数やグラフの扱いなど、プログラミングと親和性が高い教科である。本研究では、数学における関数の学習で特に「速さ・時間・距離」の関係に焦点を当てる。

概念型学習では、知識を個別の事実としてではなく、複数の文脈に適用可能な抽象的な概念構造として理解することを重視する。本研究が対象とする転移は、数学の文脈において扱われる「速さ・時間・距離」の関係が、プログラムによる計算・リストの生成・グラフ可視化といった表現環境を経由して再解釈され、その結果として再び数学的な解釈や判断に用いられる過程である。すなわち、数学で形成されつつある概念が、プログラミングの操作と可視化を媒介として関係づけ直され、再び数学の文脈に戻ってくる往還的な学習プロセスを転移として捉える。

表１　Bruner の三表象理論と中学校数学での関数の学習の具体例

表象モード	特徴（表層）	中学校数学での具体例
操作的表象 (Enactive)	行動・操作を通して理解する段階。具体的な試行錯誤や操作が中心。	値を変えて表を作成する、表の数値を操作して関係を確かめる、具体的な数値代入による計算。
映像的表象 (Iconic)	視覚的・図像的に捉える段階。イメージや図を通じて概念を把握。	グラフを描いて変化を視覚化、関数の傾きや切片を図で確認する。
象徴的表象 (Symbolic)	抽象的な記号・言語で概念を表現する段階。数式・記号操作が中心。	文字式を用いて関数の関係を表す、一般式で解法を導く、変数を使った一般化。

[中学校の関数教育]

日本の数学教育では1970年代以降、「関数の指導において表・式・グラフを関連付けて理解させる」という方針が定着しており、これは「関数を多面的に捉えさせる」という実践的・教育学的な判断に基づいている。学習指導要領自体にはBrunerの理論の明示的な記述はないが Bruner (1966) の三表象理論に照らすと、「表・式・グラフ」の扱いは表１のように対応していると捉えることができる。

つまり、中学校数学での関数の学習において、「表・式・グラフ」の相互関係を関連付けて指導する方針は、Bruner (1966) が提唱した三表象理論に基づいて解釈できる。すなわち、操作的表象としての表、映像的表象としてのグラフ、象徴的表象としての数式を往復させる活動が、関数の概念形成を支えている。

Ⅱ．授業設計と方法

次に示す典型的な算数の「追いつき問題」を使って授業を設計する。この問題は、中学生なら変数を使って解くことができる。出題の意図としては太郎さんの出発後 15 分が正答であるが、曖昧な出題だったので姉を基準とすると出発して 12 分も正答と言える。

> 太郎さんは家から学校まで歩いていきます。
> 　太郎さんは 1 分で 80m 歩きます。
> 　姉は太郎さんより 3 分遅れて家を出発します。
> 　姉は 1 分で 100m 歩きます。
> 姉は何分後に太郎さんに追いつきますか？

この問題を使って①数学と②プログラムの 2 段階で授業を構成する。①では数学的にプリントで解き、表（操作的表象）や式（象徴的表象）を通して「距離・時間・速さ」の関係を扱い、グラフ（映像的表象）で比例的な関係 (一次関数的) をとらえさせる。②では、プログラムで計算しリスト化することで数量の変化を追跡し (操作的表象)、その関係をグラフとして可視化することで (映像的表象)、出力結果を踏まえてコードを再記述し、数量関係を記号として再構成する過程（象徴的表象）で、三表象を往復する経験を提供する。ここで扱う三表象は、数学における「表（操作的）・式（象徴的）・グラフ（映像的）」という表現形式を、プログラムにおける実行・再記述・可視化という認知過程に対応させて扱うもので、物理的な表現形式ではなく、関係を捉える認知が対応するものとして位置づける。この活動を Erickson の概念型学習としてとらえ、表・式・グラフの関連付けをプログラムが媒介するように設計した。

表２　実践授業の構成

セッション	目的	活動内容	表象
午前	プログラムの基本操作習得	for 文, if 文, リスト, plot の練習	操作的
事前	学習前の理解状況の把握	グラフ概念に関するアンケート	―
午後①	数学的にプリントで問題を解く	式、表、グラフの関連付け	操作的、象徴的、映像的
午後②	プログラムで三表象を関連付ける	リストの作成（操作的）、リストを表として理解（象徴的）、グラフ化（映像的）	操作的＋象徴的＋映像的
事後	学習後の理解変化の把握	活動の難易度、理解の変化、自由記述	―

表３　事前アンケートの回答

生徒	グラフの軸の意味	直線の傾きの意味	直線の交点の意味
A	1	1	1
B	3	3	3
C			
D	5	5	5
E	5	5	5
F	3	3	3

本研究は、学校の正規授業としてではなく、地域学習支援事業として設置されたプログラミング講座の場で実施した。対象は中学校1・2年生6名であり、学校を通じて募集を行い、自発的に参加した生徒で構成された。そのため、参加者の学校・学年は同一ではないが、いずれもプログラミングに興味・関心を有していた点は共通していた。参加は任意であり、分析に際しては、個人情報が特定されないよう匿名化したデータを用いた。

【実践】

2025年8月、愛媛県U市内の中学校1・2年生6名を対象に実施した。授業は午前にPythonの基礎学習を行い、for 文、if 文などの基本文法を確認し、表とグラフを作るために必要なリストと plot について反復練習を行った。午後は提案する2段階の活動を通じて数学の概念とプログラミング学習をつなげた。表２に実践授業の構成を示す。

午後①の前に事前アンケート、午後②の後に事後アンケートをとった。また、午後①のプリントを回収し、これらを授業データとする。

本実践における概念型学習の中心概念は、「速さ・時間・距離の相互関係」である。学習者は、表（操作的表象）・式（象徴的表象）・グラフ（映像的表象）の三表象を、プログラミングによる計算・リスト化・可視化を媒介として往還する中で、速さ・時間・距離の三量がどのように関係づけられているかという構造を再組織することを目指した。複数の表現形式を行き来しながら共通する関係を見出すことで、学習者自身が「距離は速さと時間によって決まる」という一般化を言語化できるように設計した点に、本研究における概念型授業の特徴がある。

表４　数学的に解いたプリントの分析

生徒	操作的表象	象徴的表象	映像的表象	正誤
A	○	○	×	正答
B	×	○	×	正答 (両基準で時間算出)
C	○	△ (中断)	×	誤答(8分後と記述)
D	○	○	×	正答（姉基準12分後）
E	△	△	×	誤答 (相対速度を扱えず)
F	○	×	×	正答 (太郎基準15分後)

Ⅲ. 収集した授業データの分析

1. 事前アンケートによる学習前の理解状況

午後①の前に生徒の事前知識を把握するための5段階評価アンケートを実施した。項目は「グラフの軸の意味」,「直線の傾きの意味」,「直線の交点の意味」の3点で、1:よくわかる、2:わかる、3:どちらともいえない、4:あまりわからない、5:わからない の5段階で回答を求めた。

結果を表３に示す。6名全員が、3項目すべてに同じ値を回答しており（1名は無回答）、項目間の意味を区別していないことがうかがえた。3項目（軸・傾き・交点）を区別して理解している生徒がほとんどいないことを示唆している。さらに、その内4名は「3:どちらともいえない」または「5:わからない」を選択しており、グラフの基本概念（軸・傾き・交点）に関する理解が不十分であることが明らかとなった。

2. 午後①のプリント分析にみる表象の活用状況

午後①の授業では解答を示さなかった。生徒からは12分、8分、15分などの答えが出た。このときのプリントを詳細に分析すると表４のようになった。ここでは、○を「表象を安定的に用いて解決に至っている状態」、△を「表象の活用を試みているものの、解釈・構造化が部分的に留まっている移行段階」、×を「表象が解決過程に活用されていない状態」として区別する。

グラフを描いた生徒は見られず、映像的表象が十分に育っていないことがうかがえる。一方で、操作的表象については、A、C、Fの3名が距離を追跡する表を

作成しており、値の変化を逐次確認する解法がみられた。また、D は表としては構成されていないものの、必要な計算を順に求める形で距離の変化を追っており、操作的表象の使用が部分的に認められた。さらに、B は、距離・速さ・時間の関係を式として記述し解法に用いており、象徴的表象による構造化が試みられていた。A は、式と表を対応させながら一般化を図ろうとする記述が見られ、象徴的表象の萌芽が確認された。

正答は 4 名で操作的表象は一定程度安定して活用されていた。一方、象徴的表象については、A および B に式による構造化が見られたものの、学習者全体に共有されているとは言い難い。誤答の 2 名も、操作と象徴の表象間の往復は見られるが、その過程における数量関係の再組織化は不十分であり、概念の統合に至っていない。

午後②では、自分たちでプログラムする時間（個別、相談）をとったが、「3 分遅れ」をどのように表現するか自分たちでは解決できずプログラムは完成しなかった。そこで、教師が実演しながら次のプログラムを提示し、その結果のグラフを表示した（図１）。

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
x=[]
y1=[]
y2=[]
for i in range(0,20):
    x.append(i)
    y1.append(80*i)
    y2.append(100*(i-3))
plt.plot(x,y1)
plt.plot(x,y2)
plt.grid(True)
plt.show()
```

実演しながら提示したプログラム

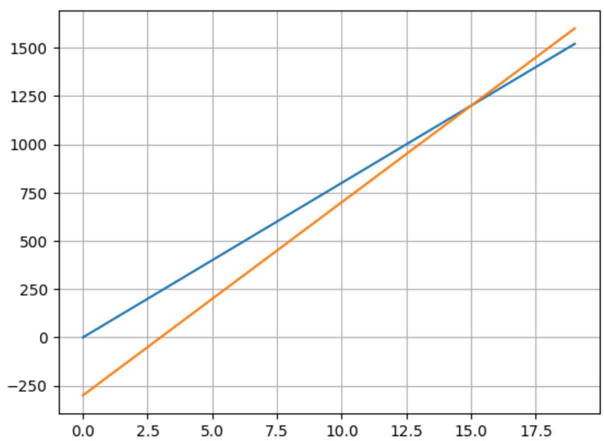

図１　はじめに表示したグラフ

表５　はじめの３分は姉の位置が 0 となる表

0	1	2	3	4	・・・	13	14	15	16	17	18
0	80	160	240	320	・・・	1040	1120	1200	1280	1360	1440
0	0	0	0	100	・・・	1000	1100	1200	1300	1400	1500

このグラフから 15 分が正答だとわかるが、単に

$$y = 100(x - 3) = 100x - 300$$

では、出発するまでの 3 分が負の値になって何を指しているか実感のわかない生徒もいた。そこで、if 文で次の条件を与え、姉の位置(y2)に負の値がないようにし、このプログラムの表示結果を示した。

```
if i < 3:
    y2.append(0)
else:
    y2.append(100 * (i - 3))
```

負の値が出ないようにつけた条件

図１では理解しきれなかった生徒も、表（表５）とグラフ（図２）により 3 分遅れの解釈（姉の視点）を実感することで 12 分でも正答だと理解が深まっていた。

このように午後②でプログラムを媒介に表象をつなぐことにより、距離と時間の関係を多面的に理解するプロセスが促進された。

3. 事後アンケートによる理解の変化と自覚

午後②の後に、学習内容の難易度や理解の変化を把握するための事後アンケートを実施した。アンケートは、学習活動の難易度（1:難しかった ～ 5:とても簡単だったの 5 段階評価）、「式・表・グラフ・プログラムのどこで意味が変わった感覚があったか」の選択、自由記述の 3 項目で構成した。

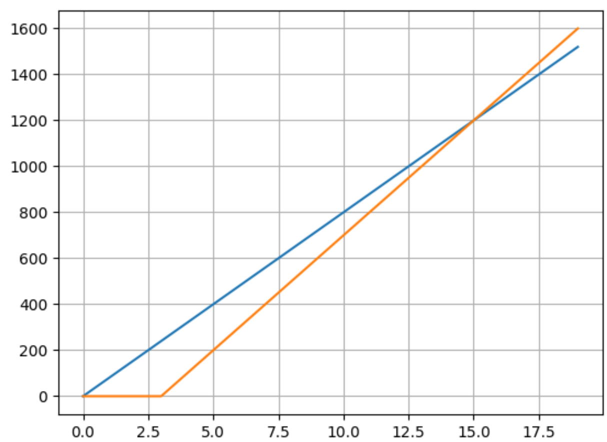

図２　姉が 3 分後に出発することがわかるグラフ

表６　事後アンケートの回答

難易度	意味が変わった活動	自由記述
3	プログラム	分かった！！
2	グラフ	数学では時間がかかる問題がすぐにできたのですごいと思った。
2	グラフ	数学と似ていて、数学と違うところが難しかった。
2	プログラム	少し難しかったです。
2	グラフ	数学の知しきがプログラミングでも使われることがわかりました。
2	プログラム	グラフをプログラムで書けるようになった

結果を表６に示す。難易度評価では、6 名中 5 名が「2:少し難しかった」、1 名が「3:ふつう」と回答しており、「1:難しかった」や「4:簡単だった」「5:とても簡単だった」とする回答はなかった。このことから、学習内容は一定の挑戦感を伴いつつも、取り組み可能な範囲にあったと解釈できる。

また、「意味が変わった感覚があった活動」としては「プログラム」および「グラフ」が多く選ばれ、「式」や「表」を挙げた生徒はいなかった。自由記述には、「数学では時間がかかる問題がすぐにできた」「数学の知識がプログラミングでも使われることがわかった」といった数学とプログラムのつながりを実感する記述や、「グラフをプログラムで書けるようになった」といった可視化の効果を指摘する記述が見られた。

これらの結果から、午後②のプログラム活動が、午後①のプリント演習で扱った表や式の操作と結び付き、数学とプログラミングの表現環境を往還する中で、数量関係を再解釈する機会となったことが示唆される。概念の再組織化の過程が起きていることが示唆される。

Ⅳ. 考察

これまでの分析（午後①のプリント分析、事前アンケート、事後アンケート）を総合すると、生徒の表象の活用と概念理解には明確な変化が見られた。

まず、午後①のプリント分析では、解答の多くが操作的表象（表の作成）に依存しており、象徴的表象（式）を十分に扱えた生徒は一部にとどまった。また、映像的表象（グラフ）の活用は一切見られず、表象の幅が限定的であったことが明らかとなった。ただし、一部の生徒では表と式を往復しながら問題に取り組む姿が確認され、多表象にまたがる理解も見られた。

表７　学習前における三表象の関係づけの状況

	表 操作的表象	式 象徴的表象	グラフ 映像的表象
表 操作的表象	−	部分的に参照	関連が見られない
式 象徴的表象	値からの作成は可能。	−	結びつきが弱い
グラフ 映像的表象			−

表８　学習後における三表象の関係づけの変容

	表 操作的表象	式 象徴的表象	グラフ 映像的表象
表 操作的表象	−	値と記号の対応付けが生起	解釈できる
式 象徴的表象	式に基づく手続きの成立	−	傾き、初期値の意味付け
グラフ 映像的表象	表への再構成は未成立	式との対応の萌芽	−

事前アンケートの結果からは、グラフに対する知識そのものは一定程度あるものの、「軸」、「傾き」、「交点」といった概念の区別が不明確であることが示唆された。このことから、授業前の段階では式とグラフを関連付けて考えることが難しく、表象間の往復による概念構築が十分に形成されていなかったと推察される。

実際、午後①の活動では、操作的表象（表）に依存した解法が中心であり、象徴的表象（式）および映像的表象（グラフ）との対応づけが十分に成立していなかったことが示されていることから、学習前の段階における表象のつながりを表７にまとめる。

一方、午後②のプログラム演習では、式を基に距離のデータをリスト化し、表として確認したうえで、それをグラフとして可視化する活動を行った。この過程を経て、式・表・グラフの三表象が往還的に関係づける学習体験が提供された。プログラムによる計算・リスト化・可視化という過程を経ることで、表・式・グラフの間に往還的な参照関係が生じ、数量関係を複数の表象を通して捉える試みが見られたことを表８にまとめる。

その結果として、事後アンケートの自由記述には「数学では時間がかかる問題がすぐにできた」「グラフをプログラムで書けるようになった」といった言語表現が見られ、三表象を行き来しながら数量関係を再解釈する再組織化の過程が生起していることが確認

された。すなわち、本実践は単なる手続き習得ではなく、複数の表象を往還しながら速さ・時間・距離の関係を構造として捉える経験を通じて、学習者自身が概念を再組織化し言語化する過程を支えた点で、Erickson の概念型学習に位置づけられる。

Ⅴ．まとめ

本研究では、概念型学習の観点から、式・表・グラフの三表象を、プログラミング（計算・リスト化・可視化）を媒介として関連付ける学習過程を設計・実践した。対象とした「速さ・時間・距離」の数量関係が、数学とプログラムの表現環境を行き来する中でどのように理解されるかを検討した。

学習前には、表に依拠した操作的な解法が中心で、式やグラフとの対応付けは限定的であった。学習後には、プログラムで得られた数値を表として確認し、さらにグラフとして可視化する過程を通して、式・表・グラフが相互に関係づけられ、三表象の間を往復しながら関係を理解する様子が観察された。これは三表象の関係づけが再組織化されつつある段階が生起したことを示している。

このことは、プログラムが単に計算する手段としてではなく、数量関係を操作し、構造化し、可視化することを通して、概念の再解釈を可能にする媒介として機能することを示している。本研究の目的であった三表象の統合には至らなかったものの、統合に向かうための関係づけの変容（再組織化）の兆候が確認された。

教育的には、中学生段階の数学とプログラミング学習を技能習得や操作演習としてではなく、複数の表象を往還することによって概念理解を深める学習活動として位置づけることの意義が示された。

参考文献

Bruner, J. S. (1966). Toward a Theory of Instruction. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Erickson, H. L. (2007). Concept-Based Curriculum and Instruction for the Thinking Classroom. Corwin Press.